

# 契約曲線とオッファー曲線の方程式

尾 崎 雄一郎

## 1. はじめに

2つの消費財各々の総量が与えられているとき、2人の消費者各々の効用を最大にする両財のいろいろな組合せを表す契約曲線は、両財の総量によって定まるボックス・ダイアグラムにおいて2人の無差別曲線の背中合せの接点の軌跡として描かれる。ボックス・ダイアグラムはしばしば Edgeworth ボックス・ダイアグラムとか、Edgeworth-Bowley ボックス・ダイアグラムと呼ばれるが<sup>1</sup>、Edgeworth の著作のどこにも無差別曲線やボックス・ダイアグラムが見られないことが Tarascio [20]、Jaffé [12]、Weatherby [23] によって指摘された。最初に、ボックス・ダイアグラムを用いたのは Parato であり、それは Jaffé [12] によれば 1893 年、Tarascio [20] によれば 1906 年のことである。Bowley [5]<sup>1</sup> がボックス・ダイアグラムと契約曲線を用いたのは 1924 年である。同様に、異なった財を生産する2つの企業(産業)に対する2つの生産要素の総賦存量が所与であるとき、2つの財の生産量を最大にする2つの生産要素のいろいろな組合せを表す契約曲線は、各々の生産要素の総賦存量によって定まるボックス・ダイアグラムにおいて両企業の等量曲線の背中合せの接点の軌跡として描かれる。<sup>2</sup>

各々の消費者が2つの財を一定量ずつ保有しているとき、両財のいろいろな価格に対して各人の効用を最大にする両財のいろいろな組合せを表すオッファー曲線は、各人の財の保有量を示す点を通る価格線と各人の無差別曲線との接点の軌跡として描かれ、<sup>3</sup> 2人の消費者のオッファー曲線は契約曲線上で交わる。

時に蛇行した契約曲線とか、正と負の傾きをもち、反転しているオッファー曲線が描かれることがあるが、このような場合生産可能性曲線も蛇行するし、ギッフェン財のように右上がりの需要曲線とか、反転している労働の供給曲線が導き出されることになる。しかし、蛇行した契約曲線とか

1 Pp. 5-9.

2 消費の理論、生産の理論、厚生経済学、国際経済学などにおける契約曲線の幾何学的な導出が、Asimakopulos [2], pp. 147-150, Boadway and Bruce [3], pp. 64-67, 74-75, Boulding [4], pp. 627-630, Caves and Jones [6], pp. 21-23, 109-111, Chacholiades [7], pp. 101-105, Cohen and Cyert [8], pp. 479-482, Ferguson and Maurice [9], pp. 383-389, Hadar [10], pp. 307-312, Henderson and Quandt [11], pp. 162-164, 256-258, Lancaster [13], pp. 249-253, Mishan [14], pp. 50-59, 66-71, Nicholson [15], pp. 611-617, 648-652, Russell and Wilkinson [16], pp. 310-317, Silberberg [17], pp. 536-539, Södersten [18], pp. 57-61, Varian [21], pp. 314-317, Varian [22], pp. 484-489 などに見られる。

3 2人の消費者のオッファー曲線の幾何学的な導出は、たとえば Asimakopulos [2], pp. 147-150, Boadway and Bruce [3], pp. 64-67, Henderson and Quandt [11], pp. 162-164, 256-258, Nicholson [15], pp. 611-617, 648-652, Russell and Wilkinson [16], pp. 310-317, Varian [21], pp. 314-317 などに見られる。

反転しているオッファー曲線は、すべて可能性があるものとして推測を交えて幾何学的に描かれたものであって、具体的な効用関数や生産関数から導出されたものではない。

Chacholiades [4]<sup>4</sup> は、2つの生産関数が1次同次である場合、契約曲線がボックス・ダイアグラムにおける2つの企業各々の原点を結んでできる要素賦存量の比率を表す直線よりある所で上方(下方)に位置するならば、2つの原点を除くすべての点においてその直線より上方(下方)に位置することを幾何学的に証明した。また、Takayama [19]<sup>5</sup> は、2つの生産関数が1次同次である場合、要素賦存量の比率を示す直線より契約曲線が上方(下方)にあってこの直線に対して至る所で凹であるための条件を厳密に求めた。効用(生産)関数が1次同次で、要素賦存量の比率を示す直線に契約曲線が一致する特殊な場合を除けば、これまで契約曲線やオッファー曲線の方程式が具体的に求められたことは筆者の知る限りない。

本論文においてある効用関数の下で契約曲線の方程式と2人の消費者各々のオッファー曲線の方程式、1次同次の生産関数の中では極めて一般的なCES生産関数の下で契約曲線の方程式を具体的に導出する。所与の効用関数や生産関数の下で契約曲線の方程式がわかれば、契約曲線上のすべての点における無差別曲線や等量曲線の限界(技術)代替率がわかる。また、財や生産要素の所与の賦存量に対する2つのオッファー曲線の方程式がわかれば、これらの賦存量に対応する契約曲線上の点が求まる。

## 2. 契約曲線の方程式

消費者 $i$ の効用水準を $U_i$ 、ある財の数量を $X_i$ 、別の財の数量を $Y_i$ 、2人の消費者の効用関数を各々

$$(1) \quad U_1 = A_1 X_1^{\alpha_1} Y_1^{\beta_1}$$

$$(2) \quad U_2 = A_2 X_2^{\alpha_2} Y_2^{\beta_2}$$

とし、<sup>6</sup> 各々のパラメーターについて

$$(3) \quad A_i > 0, \quad 0 < \alpha_i \leq 1, \quad 0 < \beta_i \leq 1 \quad (i=1, 2)$$

と仮定する。(1)と(2)は各々 $\alpha_i + \beta_i$ 次の同次関数で、 $\alpha_i + \beta_i = 1$ であるときCobb-Douglasタイプの効用関数になる。(1)と(2)において $U_i = U_i^0$ (一定)とした無差別曲線において

$$(4) \quad \frac{dY_i}{dX_i} = -\frac{\alpha_i Y_i}{\beta_i X_i} < 0 \quad (i=1, 2)$$

であり、

$$\frac{d^2 Y_i}{dX_i^2} = \frac{\alpha_i(\alpha_i + \beta_i) Y_i}{\beta_i^2 X_i^2} > 0 \quad (i=1, 2)$$

であるから、各々の無差別曲線は右下りで、原点に対して凸である。

2人の消費者に対する契約曲線は、両財の所与の賦存量を $X$ 、 $Y$ として

4 Pp. 103-105.

5 Pp. 99-106.

6 以下の議論は $X_i$ 、 $Y_i$ を2つの企業(産業)の生産要素の量、 $U_i$ を生産量とし、(1)と(2)を生産関数としても成り立つ。

$$(5) \quad U_1 = A_1 X_1^{\alpha_1} Y_1^{\beta_1}$$

を次の制約条件

$$U_2^0 = A_2 X_2^{\alpha_2} Y_2^{\beta_2}$$

$$(6) \quad X = X_1 + X_2$$

$$Y = Y_1 + Y_2$$

の下で最大にする両財の数量  $X_1$  と  $Y_1$  の関係を求めることによってえられる。ラグランジュ乗数  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\eta$  を用いてラグランジュ関数

$$(7) \quad V = A_1 X_1^{\alpha_1} Y_1^{\beta_1} + \lambda(U_2^0 - A_2 X_2^{\alpha_2} Y_2^{\beta_2}) + \mu(X - X_1 - X_2) + \eta(Y - Y_1 - Y_2)$$

を作る。(7) より極大条件として

$$(8-1) \quad V_1 = \partial V / \partial X_1 = \alpha_1 A_1 X_1^{\alpha_1-1} Y_1^{\beta_1} - \mu = 0$$

$$(8-2) \quad V_2 = \partial V / \partial Y_1 = \beta_1 A_1 X_1^{\alpha_1} Y_1^{\beta_1-1} - \eta = 0$$

$$(8-3) \quad V_3 = \partial V / \partial X_2 = -\lambda \alpha_2 A_2 X_2^{\alpha_2-1} Y_2^{\beta_2} - \mu = 0$$

$$(8-4) \quad V_4 = \partial V / \partial Y_2 = -\lambda \beta_2 A_2 X_2^{\alpha_2} Y_2^{\beta_2-1} - \eta = 0$$

$$(8-5) \quad V_5 = \partial V / \partial \lambda = U_2^0 - A_2 X_2^{\alpha_2} Y_2^{\beta_2} = 0$$

$$(8-6) \quad V_6 = \partial V / \partial \mu = X - X_1 - X_2 = 0$$

$$(8-7) \quad V_7 = \partial V / \partial \eta = Y - Y_1 - Y_2 = 0$$

をえる。(8-1) から (8-4) より

$$\frac{\mu}{\eta} = \frac{\alpha_1 Y_1}{\beta_1 X_1} = \frac{\alpha_2 Y_2}{\beta_2 X_2}$$

となり、これに (8-6) と (8-7) を代入して、整理すると、

$$(9) \quad Y_1 = \frac{\theta Y X_1}{(\theta - 1) X_1 + X}$$

という契約曲線の方程式をえる。ここで、

$$(10) \quad \theta = \alpha_2 \beta_1 / \alpha_1 \beta_2 > 0$$

である。(9) において  $X_1 = 0$  ならば  $Y_1 = 0$ ,  $X_1 = X$  ならば  $Y_1 = Y$  となる。(9) は  $\theta = 1$  であるとき、

$$(11) \quad Y_1 = \frac{Y}{X} X_1$$

という直線になり、 $\theta \neq 1$  であるとき

$$(12) \quad \left( X_1 - \frac{X}{1 - \theta} \right) \left( Y_1 - \frac{\theta Y}{\theta - 1} \right) = - \frac{\theta X Y}{(\theta - 1)^2}$$

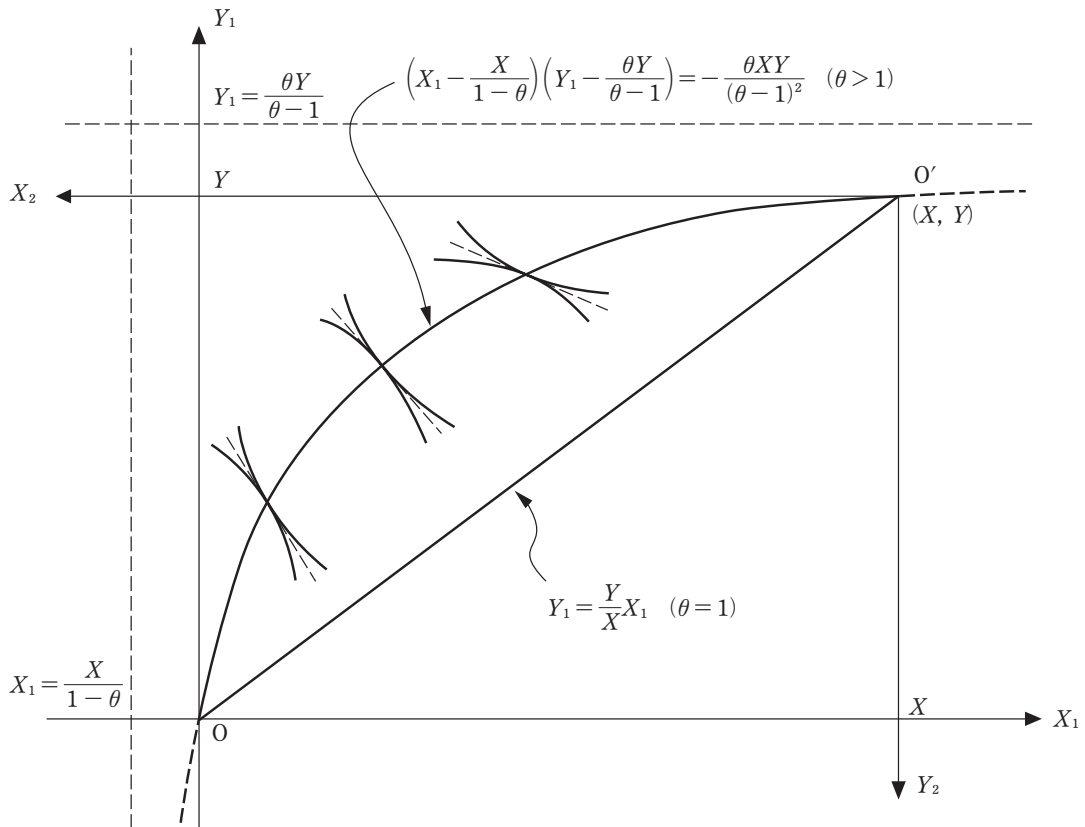
と表せ、これは  $X_1 = X/(1 - \theta)$ ,  $Y_1 = \theta Y/(\theta - 1)$  を漸近線とする直角双曲線である。契約曲線 (12) は、右上りで、 $\theta > 1$  である場合、第 1 図のように  $\theta = 1$  である場合の契約曲線 (11) の上方にあってこれに対して凹である。また、 $0 < \theta < 1$  である場合、(11) の下方にあってこれに対して凹になる。

契約曲線上における 2 人の消費者の無差別曲線の相等しい接線の傾きは、(4) と (9) より

$$(13) \quad \frac{dY_1}{dX_1} = - \frac{\alpha_1 Y_1}{\beta_1 X_1} = - \frac{\alpha_1 \theta Y}{\beta_1 [(\theta - 1) X_1 + X]} < 0$$

$$\frac{d^2 Y_1}{dX_1^2} = \frac{\alpha_1 \theta (\theta - 1) Y}{\beta_1 [(\theta - 1) X_1 + X]^2}$$

となる。(13) より契約曲線上における無差別曲線の相等しい接線の傾きは負で、その絶対値は

第1図  $\theta = 1$  と  $\theta > 1$  の場合の契約曲線

$\theta > 1$  であるときには  $X_1$  が増加するにつれて減少し,  $\theta = 1$  であるときには不変で,  $0 < \theta < 1$  であるときには増加する。

(5)を制約条件(6)の下で最大にするための2階の条件は, (8-1)から(8-7)を偏微分してえられる次の縁付き Hesse 行列式, すなわち

$$(14) \quad H = \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ V_{21} & V_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & V_{33} & V_{34} & V_{35} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & V_{43} & V_{44} & V_{45} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & V_{53} & V_{54} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

が正であることである。<sup>7</sup> (14)における変数の番号は(8-1)から(8-7)における番号と同じである。

7 たとえば Hadar [10], pp. 345-348, Henderson and Quandt [11], pp. 404-407, Silberberg [17], pp. 173-177 を参照のこと。

(3), (8-1), (8-2) より  $X_i > 0$ ,  $Y_i > 0$  ( $i = 1, 2$ ) に対して  $\mu > 0$ ,  $\eta > 0$  であるから, (8-3) あるいは (8-4) より  $\lambda < 0$  であり, すべての  $i$  と  $j$  について  $V_{ij} = V_{ji}$ ,  $V_{ii} \leq 0$  ( $i = 1, \dots, 4$ ),  $V_{12} > 0$ ,  $V_{34} > 0$ ,  $V_{35} < 0$ ,  $V_{45} < 0$  であるから, (14) の  $H$  は

$$(15) \quad H = 2(V_{12} + V_{34})V_{35}V_{45} - (V_{11} + V_{33})V_{45}^2 - (V_{22} + V_{44})V_{35}^2 > 0$$

となり, 所望の結果がえられる.

### 3. オッファー曲線の方程式

消費者が両財を一定量保有しているとき, 保有している財と同じ評価額でこの消費者の効用を最大にする両財の数量をいろいろな価格の下で表すオッファー曲線の方程式を本節で求める.

消費者 1 が保有する両財の数量を一定の  $X_1^0$ ,  $Y_1^0$ , 両財の価格を一定の  $p_X$ ,  $p_Y$  とする. 消費者 1 のオッファー曲線は,

$$(16) \quad U_1 = A_1 X_1^{\alpha_1} Y_1^{\beta_1}$$

を次の制約条件

$$(17) \quad p_X X_1 + p_Y Y_1 = p_X X_1^0 + p_Y Y_1^0$$

の下で最大にする  $X_1$  と  $Y_1$  の関係を求めることによってえられる. 未定乗数  $\lambda$  を用いてラグランジュ関数

$$(18) \quad V = A_1 X_1^{\alpha_1} Y_1^{\beta_1} + \lambda (p_X X_1^0 + p_Y Y_1^0 - p_X X_1 - p_Y Y_1)$$

を作り, (18) より極大条件として

$$(19-1) \quad V_1 = \partial V / \partial X_1 = \alpha_1 A_1 X_1^{\alpha_1-1} Y_1^{\beta_1} - \lambda p_X = 0$$

$$(19-2) \quad V_2 = \partial V / \partial Y_1 = \beta_1 A_1 X_1^{\alpha_1} Y_1^{\beta_1-1} - \lambda p_Y = 0$$

$$(19-3) \quad V_3 = \partial V / \partial \lambda = p_X (X_1^0 - X_1) + p_Y (Y_1^0 - Y_1) = 0$$

をえる. (19-1) から (19-3) より  $p_X > 0$ ,  $p_Y > 0$  であるとき,  $X_1 > 0$ ,  $Y_1 > 0$  でなければならない,

$$(20) \quad \frac{p_X}{p_Y} = \frac{\alpha_1 Y_1}{\beta_1 X_1} = - \frac{Y_1^0 - Y_1}{X_1^0 - X_1}$$

をえる. (20) は消費者 1 のオッファー曲線である. (20) を整理すると,

$$(21) \quad Y_1 = \frac{\beta_1 Y_1^0 X_1}{(\alpha_1 + \beta_1) X_1 - \alpha_1 X_1^0}$$

と表せ, (21) はさらに

$$(22) \quad \left( X_1 - \frac{\alpha_1 X_1^0}{\alpha_1 + \beta_1} \right) \left( Y_1 - \frac{\beta_1 Y_1^0}{\alpha_1 + \beta_1} \right) = \frac{\alpha_1 \beta_1 X_1^0 Y_1^0}{(\alpha_1 + \beta_1)^2}$$

と表せる. 消費者 1 のオッファー曲線 (22) は,  $X_1^0 > 0$ ,  $Y_1^0 > 0$  であるときには,  $(X_1^0, Y_1^0)$  を通り,  $X_1 = \alpha_1 X_1^0 / (\alpha_1 + \beta_1)$ ,  $Y_1 = \beta_1 Y_1^0 / (\alpha_1 + \beta_1)$  を漸近線とする右下りの直角双曲線である. しかし, もし  $X_1^0 = 0$  であるならば, (22) は

$$(22') \quad Y_1 = \frac{\beta_1 Y_1^0}{\alpha_1 + \beta_1}$$

という直線に, もし  $Y_1^0 = 0$  であるならば,

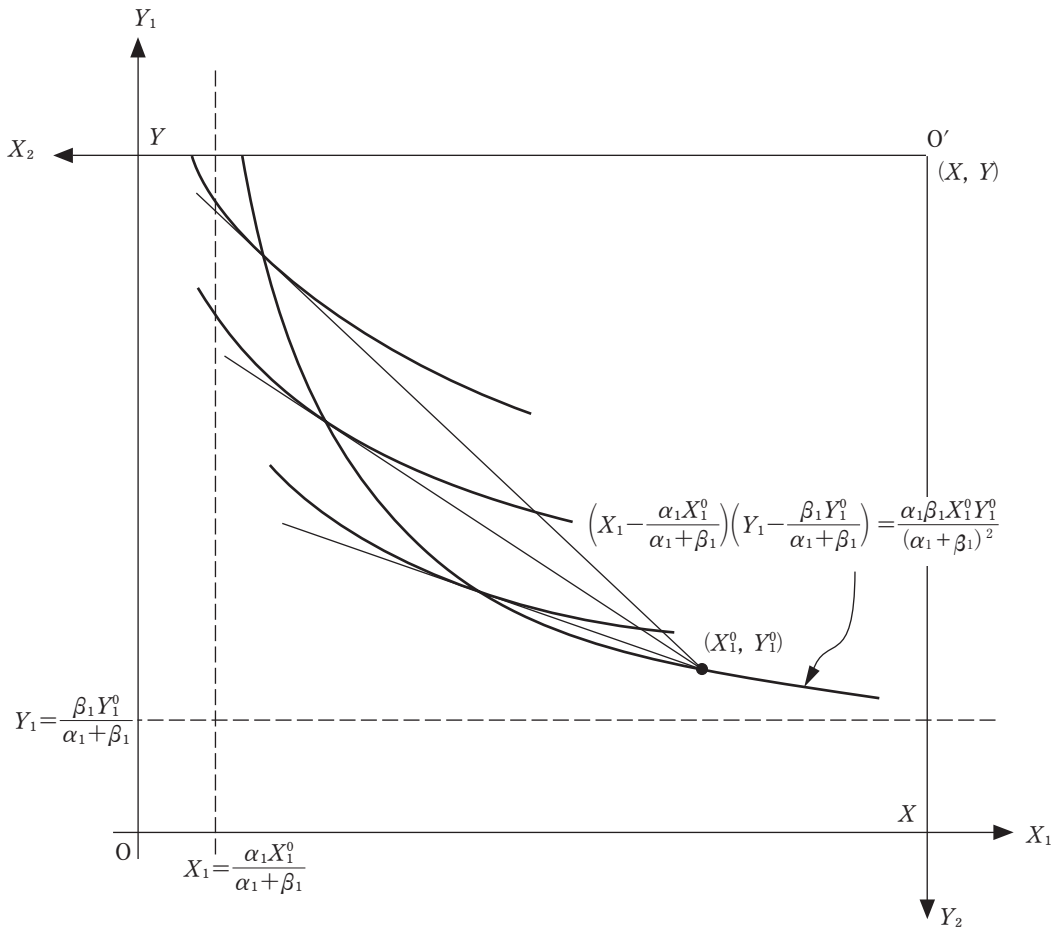
$$(22'') \quad X_1 = \frac{\alpha_1 X_1^0}{\alpha_1 + \beta_1}$$

という直線になり, これら (22') と (22'') は所与の賦存量 ( $X_1^0, Y_1^0$ ) を通らない. このように  $X_1^0 = 0$  あるいは  $Y_1^0 = 0$  であるとき, オフファー曲線 (22) は直線に退化し, これらの直線が ( $X_1^0, Y_1^0$ ) を通らないのは, 効用関数 (1) と (2) に基づく無差別曲線が  $X_i$  軸,  $Y_i$  軸と交わらないからである. (22) のグラフは第2図のようになる.

(16) を (17) の下で最大にするための2階の条件は, (19-1) から (19-3) をさらに偏微分して導出した次の縁付き Hesse 行列式, すなわち

$$H = \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & -p_X \\ V_{21} & V_{22} & -p_Y \\ -p_X & -p_Y & 0 \end{vmatrix} = 2p_X p_Y V_{12} - p_Y^2 V_{11} - p_X^2 V_{22}$$

が正であることによって満たされる. この場合, (3), (19-1), (19-2) より  $p_X > 0, p_Y > 0$  であるなら



第2図 消費者1のオフファー曲線

ば,  $X_1 > 0$ ,  $Y_1 > 0$  であり,  $V_{11} \leq 0$ ,  $V_{12} = V_{21} > 0$ ,  $V_{22} \leq 0$  であるから,  $H > 0$  が成立する.

消費者 2 のオッファー曲線は, この消費者の両財の保有量を一定の  $X_2^0$ ,  $Y_2^0$  とすると,

$$(23) \quad U_2 = A_2 X_2^{\alpha_2} Y_2^{\beta_2}$$

を次の制約条件

$$(24) \quad p_X X_2 + p_Y Y_2 = p_X X_2^0 + p_Y Y_2^0$$

の下で最大にすることによってえられる. (23) と (24) より (20) と同様に

$$(25) \quad \frac{p_X}{p_Y} = \frac{\alpha_2 Y_2}{\beta_2 X_2} = - \frac{Y_2^0 - Y_2}{X_2^0 - X_2}$$

という式をえる. (25) を整理すると,

$$(26) \quad Y_2 = \frac{\beta_2 Y_2^0 X_2}{(\alpha_2 + \beta_2) X_2 - \alpha_2 X_2^0}$$

となる. (26) は  $X_2$  と  $Y_2$  を両軸に測ったときの消費者 2 のオッファー曲線の方程式である. (26) を消費者 1 と同じ原点, 同じ座標軸の下での方程式として表すには, 2 人の消費者の両財の賦存量の合計を各々  $X$ ,  $Y$  として

$$X = X_1^0 + X_2^0 = X_1 + X_2$$

$$Y = Y_1^0 + Y_2^0 = Y_1 + Y_2$$

とすると, (26) は

$$Y - Y_1 = \frac{\beta_2 (X - X_1) (Y - Y_1^0)}{(\alpha_2 + \beta_2) (X - X_1) - \alpha_2 (X - X_1^0)}$$

と表せる. これより

$$(27) \quad Y_1 = \frac{(\alpha_2 Y + \beta_2 Y_1^0) X_1 - (\alpha_2 X_1^0 Y + \beta_2 X Y_1^0)}{(\alpha_2 + \beta_2) X_1 - (\alpha_2 X_1^0 + \beta_2 X)}$$

という消費者 1 と同じ原点, 同じ座標軸で表した消費者 2 のオッファー曲線をえる. (27) はさらに,

$$(28) \quad \left( X_1 - \frac{\alpha_2 X_1^0 + \beta_2 X}{\alpha_2 + \beta_2} \right) \left( Y_1 - \frac{\alpha_2 Y + \beta_2 Y_1^0}{\alpha_2 + \beta_2} \right) = \frac{\alpha_2 \beta_2 (X - X_1^0) (Y - Y_1^0)}{(\alpha_2 + \beta_2)^2}$$

と表せる. 消費者 2 のオッファー曲線 (28) は,  $X_1^0 < X$ ,  $Y_1^0 < Y$  であるとき,  $(X_1^0, Y_1^0)$  を通り,  $X_1 = (\alpha_2 X_1^0 + \beta_2 X) / (\alpha_2 + \beta_2)$ ,  $Y_1 = (\alpha_2 Y + \beta_2 Y_1^0) / (\alpha_2 + \beta_2)$  を漸近線とする右下りの直角双曲線である. しかし, (28) は  $X_1^0 = X$  ( $X_2^0 = 0$ ) であるときには,

$$(28') \quad Y_1 = \frac{\alpha_2 Y + \beta_2 Y_1^0}{\alpha_2 + \beta_2}$$

$Y_1^0 = Y$  ( $Y_2^0 = 0$ ) であるときには,

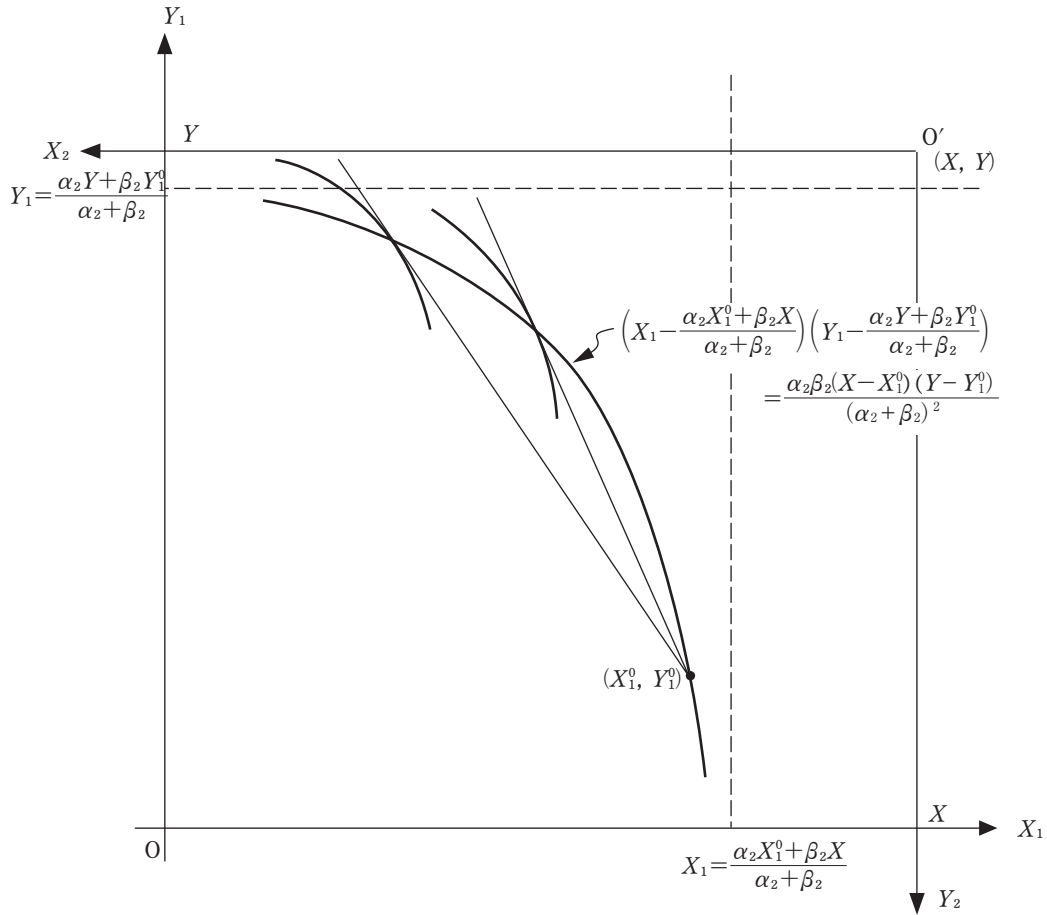
$$(28'') \quad X_1 = \frac{\alpha_2 X_1^0 + \beta_2 X}{\alpha_2 + \beta_2}$$

という直線になる. (28) のグラフは第 3 図のようになる.

2 人の消費者のオッファー曲線 (21) と (27) の交点は, これらを連立方程式として整理すると,

$$(29) \quad (X_1 - X_1^0) \{ (\alpha_1 + \beta_1) \alpha_2 Y + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) Y_1^0 \} X_1 - \alpha_1 (\alpha_2 X_1^0 Y + \beta_2 X Y_1^0) = 0$$

となるから, これらの交点の 1 つは  $(X_1^0, Y_1^0)$  であり, もう 1 つの交点を  $(X_1^*, Y_1^*)$  とすると, (21) と (29) より



第3図 消費者2のオッファー曲線

$$(30) \quad \begin{aligned} X_1^* &= \frac{\alpha_1(\alpha_2 X_1^0 Y + \beta_2 X Y_1^0)}{(\alpha_1 + \beta_1)\alpha_2 Y + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) Y_1^0} \\ Y_1^* &= \frac{\beta_1(\alpha_2 X_1^0 Y + \beta_2 X Y_1^0)}{(\alpha_1 + \beta_1)\beta_2 X + (\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2) X_1^0} \end{aligned}$$

と表せる。したがって、両財の賦存量を示す点  $(X_1^0, Y_1^0)$  に対応する2人の消費者のオッファー曲線の交点は、(30)で表され、これは当然のことであるが、契約曲線(9)の上にある。このときの両財の価格比率  $p_X/p_Y$  は(20)と(30)より求めることができる。

契約曲線上の  $X_1^* > 0$  である点  $(X_1^*, Y_1^*)$  における無差別曲線の接線の方程式は、(4)より

$$(31) \quad Y_1 = -\frac{\alpha_1 Y_1^*}{\beta_1 X_1^*} X_1 + \frac{(\alpha_1 + \beta_1)}{\beta_1} Y_1^*$$

と表せる。(31)の上の  $0 < X_1^0 < X$ ,  $0 < Y_1^0 < Y$  である両財の任意の賦存量を  $(X_1^0, Y_1^0)$  とすると、これに基づく2人の消費者のオッファー曲線は常に(31)を決定する  $(X_1^*, Y_1^*)$  で交わり、さらに(31)の上になく両財の賦存量に基づく2人の消費者のオッファー曲線は(31)を決定する  $(X_1^*, Y_1^*)$  のと



ころでは交わらないことを以下において示す。

(31) の上の両財の任意の賦存量( $X_1^0, Y_1^0$ )に基づく 2 人の消費者のオッファー曲線が、契約曲線上の( $X_1^*, Y_1^*$ )とは異なる、たとえば( $X_1^{**}, Y_1^{**}$ )で交わると仮定する。すると、( $X_1^0, Y_1^0$ )から 2 人の消費者各々の無差別曲線に対して契約曲線上の 2 つの点( $X_1^*, Y_1^*$ )と( $X_1^{**}, Y_1^{**}$ )に対して接線が引けることになり、( $X_1^0, Y_1^0$ )に基づく 2 人の消費者各々のオッファー曲線は契約曲線上のこれら 2 点を通ることになる。契約曲線 (9) は、 $\theta$  の値にかかわらず、右上りであり、2 人のオッファー曲線 (21) と (27) は、 $0 < X_1^0 < X$ ,  $0 < Y_1^0 < Y$  である限り、常に右下りである。各々の消費者の右下りのオッファー曲線が右上りの契約曲線上の異なった 2 点を通ることはない。したがって、接線 (31) 上にあるどのような両財の賦存量に対しても、2 人の賦存量がともに正である限り、これに基づく 2 人の消費者のオッファー曲線はすべて契約曲線上の同一の( $X_1^*, Y_1^*$ )のところで交わる。

もし両財の賦存量( $X_1', Y_1'$ )が接線 (31) 上にないならば、( $X_1', Y_1'$ )によって定まる 2 人の消費者のオッファー曲線が (31) における( $X_1^*, Y_1^*$ )のところで交わることはない。何故ならもし 2 人のオッファー曲線が( $X_1^*, Y_1^*$ )で交わるならば、( $X_1^*, Y_1^*$ )において (31) とともに、これとは異なる傾きをもち、( $X_1', Y_1'$ )を通る別の接線がもう 1 本引けることになり、これは接線の定義に矛盾する。ゆえに、(31) 上にない両財の賦存量に基づく 2 人のオッファー曲線は (31) を定めている( $X_1^*, Y_1^*$ )で交わることはない。

#### 4. CES 生産関数の下での契約曲線の方程式

2 つの企業(産業)が存在し、企業  $i$  の生産量を  $X_i$ 、企業  $i$  が生産に用いる資本量を  $K_i$ 、労働量を  $L_i$  ( $i = 1, 2$ ) とする。2 つの企業の生産関数を各々

$$(32) \quad X_1 = A_1[\alpha K_1^{-\rho} + (1 - \alpha)L_1^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$$

$$(33) \quad X_2 = A_2[\beta K_2^{-\rho} + (1 - \beta)L_2^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$$

とし、各々のパラメーターは

$$(34) \quad A_i > 0 \ (i = 1, 2), \ 0 < \alpha < 1, \ 0 < \beta < 1, \ \rho > -1$$

であると仮定する。(32) と (33) は 1 次同次の CES 生産関数である。<sup>8</sup>

このとき、2 つの企業による契約曲線は、

$$(35) \quad X_1 = A_1[\alpha K_1^{-\rho} + (1 - \alpha)L_1^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$$

を次の制約条件

$$(36) \quad X_2^0 = A_2[\beta K_2^{-\rho} + (1 - \beta)L_2^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$$

$$K = K_1 + K_2$$

$$L = L_1 + L_2$$

の下で最大にする資本と労働の量を求めることによってえられる。ここで、 $X_2^0$  は一定で、 $K$  と  $L$  は 2 つの生産要素の総賦存量で一定である。ラグランジュ乗数  $\lambda, \mu, \eta$  を用いてラグランジュ関数

8 このような代替の弾力性が一定の CES 生産関数は、Arrow, Chenery, Minhas, and Solow [1] によって見出された。Henderson and Quandt [11], pp. 85-88 も参照のこと。

$$(37) \quad V = A_1[\alpha K_1^{-\rho} + (1-\alpha)L_1^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}} + \lambda\{X_2^0 - A_2[\beta K_2^{-\rho} + (1-\beta)L_2^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}\} \\ + \mu(K - K_1 - K_2) + \eta(L - L_1 - L_2)$$

を作る. (37) より極大条件として

$$(38-1) \quad V_1 = \partial V / \partial K_1 = \alpha K_1^{-\rho-1} A_1[\alpha K_1^{-\rho} + (1-\alpha)L_1^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}-1} - \mu = 0$$

$$(38-2) \quad V_2 = \partial V / \partial L_1 = (1-\alpha)L_1^{-\rho-1} A_1[\alpha K_1^{-\rho} + (1-\alpha)L_1^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}-1} - \eta = 0$$

$$(38-3) \quad V_3 = \partial V / \partial K_2 = -\lambda\beta K_2^{-\rho-1} A_2[\beta K_2^{-\rho} + (1-\beta)L_2^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}-1} - \mu = 0$$

$$(38-4) \quad V_4 = \partial V / \partial L_2 = -\lambda(1-\beta)L_2^{-\rho-1} A_2[\beta K_2^{-\rho} + (1-\beta)L_2^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}-1} - \eta = 0$$

$$(38-5) \quad V_5 = \partial V / \partial \lambda = X_2^0 - A_2[\beta K_2^{-\rho} + (1-\beta)L_2^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}} = 0$$

$$(38-6) \quad V_6 = \partial V / \partial \mu = K - K_1 - K_2 = 0$$

$$(38-7) \quad V_7 = \partial V / \partial \eta = L - L_1 - L_2 = 0$$

をえる. (38-1) から (38-4) より

$$\frac{\mu}{\eta} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \left( \frac{L_1}{K_1} \right)^{\rho+1} = \frac{\beta}{(1-\beta)} \left( \frac{L_2}{K_2} \right)^{\rho+1}$$

をえ, この式を整理すると,

$$(39) \quad K_1 = \tau \frac{K_2}{L_2} L_1$$

となる. ここで,

$$(40) \quad \tau = \left[ \frac{\alpha(1-\beta)}{(1-\alpha)\beta} \right]^{\frac{1}{\rho+1}} > 0$$

である. (39) に (38-6) と (38-7) を代入して整理すると,

$$(41) \quad K_1 = \frac{\tau K L_1}{(\tau-1)L_1 + L}$$

という CES 生産関数 (32) と (33) に基づく契約曲線の方方程式をえる. (41) は,  $L_1 = 0$  であるとき  $K_1 = 0$ ,  $L_1 = L$  であるとき  $K_1 = K$  であり, また  $\tau = 1$  ( $\alpha = \beta$ ) であるとき,

$$(42) \quad K_1 = \frac{K}{L} L_1$$

となり,  $\tau \neq 1$  ( $\alpha \neq \beta$ ) であるとき,

$$(43) \quad \left( L_1 - \frac{L}{1-\tau} \right) \left( K_1 - \frac{\tau K}{\tau-1} \right) = -\frac{\tau K L}{(\tau-1)^2}$$

と表せる. (43) は  $L_1 = L/(1-\tau)$ ,  $K_1 = \tau K/(\tau-1)$  を漸近線とする右上りの直角双曲線であり,  $\tau > 1$  である場合 (42) の上方にあって (42) に対して凹になり,  $0 < \tau < 1$  である場合 (42) の下方にあって (42) に対してやはり凹になる.

(35) を (36) の下で最大にするための 2 階の条件は, (38-1) から (38-7) を偏微分してえられる縁付き Hesse 行列式の値が正となることである. この場合の縁付き Hesse 行列式は (14) と全く同じ表現になる. (34) とともに  $L_i > 0$ ,  $K_i > 0$  ( $i = 1, 2$ ) であるとき, (38-1) から (38-4) より  $\mu > 0$ ,  $\eta > 0$  であり, (38-3), (38-4) より  $\lambda < 0$  となり, すべての  $i$  と  $j$  について  $V_{ij} = V_{ji}$ ,  $V_{ii} < 0$  ( $i = 1, \dots, 4$ ),  $V_{12} > 0$ ,  $V_{34} > 0$ ,  $V_{35} < 0$ ,  $V_{45} < 0$  であるから, (15) は正となり, 望む結果を与える.

### 参考文献

- [1] Arrow, K. J., Chenery, H. B., Minhas, B., and Solow, R. M., "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 43 (1961), pp. 228-232.
- [2] Asimakopulos, A., *An Introduction to Economic Theory : Microeconomics*. Tronto : Oxford University Press, 1978.
- [3] Boadway, R. W., and Bruce, N., *Welfare Economics*. Oxford : Basil Blackwell, 1984.
- [4] Boulding, K. J., *Economic Analysis*. Vol. 1 : *Microeconomics*. Fourth Ed., New York : Harper & Row, 1966.
- [5] Bowley, A. L., *The Mathematical Groundwork of Economics* (1924). New York : Augustus M. Kelley, 1965.
- [6] Caves, R. E., and Jones, R. W., *World Trade and Payments : An Introduction*. Fourth Ed., Boston, Mass. : Little, Brown and Co., 1985.
- [7] Chacholiades, M., *International Trade Theory and Policy*. New York : McGraw-Hill Book Co., 1978.
- [8] Cohen, K. J., and Cyert, R. M., *Theory of the Firm : Resource Allocation in a Market Economy*. Second Ed., Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall, 1975.
- [9] Ferguson, C. E., and Maurice, S. C., *Economic Analysis*. Revised Ed., Homewood, Ill. : Richard D. Irwin, 1974.
- [10] Hadar, J., *Mathematical Theory of Economic Behavior*. Reading, Mass. : Addison-Wesley Publishing Co., 1971.
- [11] Henderson, J. M., and Quandt, R. E., *Microeconomic Theory : A Mathematical Approach*. Second Ed., New York : McGraw-Hill Book Co., 1971.
- [12] Jaffé, W., "Edgeworth's Contract Curve : Part I. A Propaedeutic Essay in Clarification," *History of Political Economy*, Vol. 6 (1974), pp. 343-359.
- [13] Lancaster, K., *Introduction to Modern Microeconomics*. Second Ed., Chicago, Ill. : Rand McNally College Publishing Co., 1974.
- [14] Mishan, E. J., *Introduction to Normative Economics*. Oxford : Oxford University Press, 1981.
- [15] Nicholson, W., *Microeconomic Theory : Basic Principles and Extensions*. Third Ed., Chicago, Ill. : The Dryden Press, 1985.
- [16] Russell, R. R., and Wilkinson, M., *Microeconomics : A Synthesis of Modern and Neoclassical Theory*. New York : John Wiley & Sons, 1979.
- [17] Silberberg, E., *The Structure of Economics : A Mathematical Analysis*. Second Ed., New York : McGraw-Hill Book Co., 1990.
- [18] Södersten, B., *International Economics*. London : Macmillan, 1970.
- [19] Takayama, A., *International Trade : An Approach to the Theory*. New York : Holt, Rinehart and Winston, 1972.
- [20] Tarascio, V. J., "A Correction : On the Geneology of the So-Called Edgeworth-Bowley Diagram," *Western Economic Journal*, Vol. 10 (1972), pp. 193-197.
- [21] Varian, H. R., *Microeconomic Analysis*. Third Ed., New York : W. W. Norton, 1992.
- [22] Varian, H. R., *Intermediate Microeconomics : A Modern Approach*. Third Ed., New York W. W. Norton, 1993.
- [23] Weatherby, J. L., Jr., "Why Was It Called an Edgeworth-Bowley Box? A Possible Explanation," *Economic Inquiry*, Vol. 14 (1976), pp. 294-296.