

買手独占企業の購入費最小化行動

尾 崎 雄一郎

1. はじめに

ある財(生産要素)の売手が独立した、規模の小さい、多くの企業または個人から成り立つ場合、売手の全体としての行動は市場の供給曲線によって表される。この市場において買手が唯一つの大企業である場合、この買手独占企業は売手に対して非常に強い立場にあり、個々の売手は買手独占企業が定めた価格で彼らが望む量を販売せざるをえない。この買手独占企業が一定量の財を購入しようとするとき、同一の価格で必要な量を一括して購入するよりは、その強い立場を背景に購入価格を何回か小刻みに設定し、改訂して総購入費用をできるだけ小さくすることができる。

本論文において、買手独占企業がある期間内にあらかじめ定めた回数だけ価格を自由に設定し、また改定して一定量の財を購入しようとするとき、その購入費用を最小にするにはどのようにするのが最適か数学的に考察する。この論文は、ある独占的売手が与えられた需要曲線の下で、定められた回数だけ自由に販売価格を設定し、改定して一定量の財を販売するとき、その販売からえられる総収入を最大にする問題について考察した尾崎 [6] と対をなすものである。

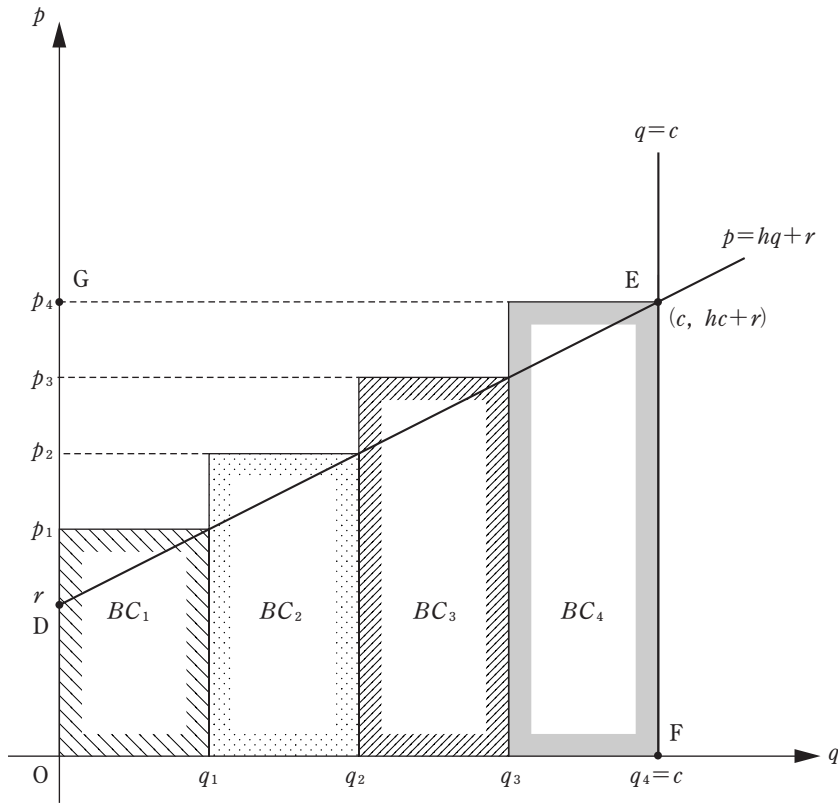
2. 予備的考察

当該財(生産要素)の価格を p 、数量を q 、線形の供給曲線を

$$(1) \quad p = hq + r, \quad h > 0, \quad r \geq 0$$

とする。(1)において $r \geq 0$ と仮定して分析を簡単にする。買手独占企業は当該財の一定量 c を一定期間内に購入しなければならず、一度財を供給した売手はこの期間内に再度供給できないものとする。本節の予備的考察では価格の設定を 4 回に分けて行い、1 回目から 3 回目までは価格を自由に設定できるけれども、最後の 4 回目は定められた量 c を最終的に購入できるように価格を設定するものとする。

第 1 図において価格を p_1 に定めると、供給曲線より財を q_1 だけ購入でき、 $c - q_1$ だけ購入すべき量が不足している。次に、価格を p_1 より高い p_2 に定めると、新たに $q_2 - q_1$ だけ購入できるけれども、まだ $c - q_2$ だけ不足している。さらに、価格を p_2 より高く p_3 に定めると、新たに $q_3 - q_2$ だけ購入できる。最後の 4 回目には 4 回分の購入量の合計が c になるように価格を設定しなければならない。したがって、4 回目の価格 p_4 は供給曲線より $p_4 = hc + r$ となるように定めなければならない。価格改定を何回行うにしても最後の回に定める価格は、買手独占企業の購入量の合計があらかじめ定めた c に等しくなるようなものでなければならない。



第1図

1回目から4回目まで各回の財の購入費用を BC_1 から BC_4 とすると,

$$\begin{aligned} BC_1 &= p_1 q_1 = hq_1^2 + rq_1 \\ BC_2 &= p_2 (q_2 - q_1) = hq_2^2 + rq_2 - hq_1 q_2 - rq_1 \\ BC_3 &= p_3 (q_3 - q_2) = hq_3^2 + rq_3 - hq_2 q_3 - rq_2 \\ BC_4 &= p_4 (q_4 - q_3) = hq_4^2 + rq_4 - hq_3 q_4 - rq_3 \end{aligned}$$

となるが, $q_4 = c$ であるので,

$$BC_4 = hc^2 + rc - hcq_3 - rq_3$$

と表せる. 以上4回の価格設定の下での購入費用の合計, すなわち総購入費用を $BC(4)$ と表すと,

$$BC(4) = \sum_{i=1}^4 BC_i = h(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + c^2) - h(q_1 q_2 + q_2 q_3 + c q_3) + rc$$

となる. ゆえに, $BC(4)$ を最小にするためには

$$\frac{\partial BC(4)}{\partial q_1} = 2hq_1 - hq_2 = 0$$

$$\frac{\partial BC(4)}{\partial q_2} = 2hq_2 - h(q_1 + q_3) = 0$$

$$\frac{\partial BC(4)}{\partial q_3} = 2hq_3 - h(q_2 + c) = 0$$

が成立しなければならない(極小のための2階の条件については次節で一般的に考察する)。これらより

$$q_1 = \frac{c}{4}, \quad q_2 = \frac{2c}{4}, \quad q_3 = \frac{3c}{4}, \quad q_4 = c$$

をえる(これらに対応する価格は供給曲線より容易に求められる)。したがって、このときの最小の総購入費用は、

$$BC(4) = \frac{5}{8}hc^2 + rc$$

となる。

3. 一般的考察

価格の改定を n 回行うものとし、 i 番目に設定する価格を p_i 、この価格に対応する供給量を q_i として一般的に考察する。このとき、 n 番目に設定する価格 p_n は、買手独占企業が総需要量 c を最終的に購入できる $p_n = hc + r$ であるとする。第 i 番目の価格 p_i とこれによって新たに生じた供給量に基づく購入費用を BC_i とすると、(1) より

$$(2) \quad BC_i = p_i(q_i - q_{i-1}) = hq_i^2 - hq_{i-1}q_i + rq_i - rq_{i-1} \quad (i = 1, \dots, n)$$

と表せる。ここで、

$$q_0 = 0, \quad q_n = c$$

である。さらに、 n 回全部の価格改定に基づく総購入費用を $BC(n)$ とすると、(2) を用いて

$$(3) \quad BC(n) = \sum_{i=1}^n BC_i = h \sum_{i=1}^n q_i^2 - h \sum_{i=1}^n q_{i-1}q_i + rc$$

と表せる。

(3) の $BC(n)$ を q_i に関して最小にするためには、まず

$$(4) \quad \frac{\partial BC(n)}{\partial q_i} = 2hq_i - h(q_{i-1} + q_{i+1}) = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

が成立しなければならない。(4) は、

$$(5) \quad \begin{aligned} 2q_1 - q_2 &= 0 \\ -q_1 + 2q_2 - q_3 &= 0 \\ -q_2 + 2q_3 - q_4 &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ -q_{n-2} + 2q_{n-1} - c &= 0 \end{aligned}$$

と表せる。(5) から q_2, q_3 等々を順に q_1 で表すと、

$$(6) \quad q_i = iq_1 \quad (i = 2, \dots, n-1)$$

となる。(5) の最後の式と (6)、さらに $q_n = c$ を用いると、

$$(7) \quad q_i = \frac{i}{n}c \quad (i = 1, \dots, n)$$

をえる。(7) より価格改定を n 回行うときには毎回総需要量 c の $1/n$ だけ新たに購入できるように供給曲線に基づいて価格を設定すればよい。

(3)の総購入費用が極小になるためには、(4)をさらに q_1 から q_{n-1} で偏微分した $\partial^2 BC(n)/\partial q_i \partial q_j$ からなる $n-1$ 次の Hesse 行列式

$$(8) \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

の主座小行列式 ($h > 0$ であるから h を省略してよい) がすべて正とならなければならない (Allen [1], pp. 485-7, 491, Benavie [2], pp. 78-80, Chiang [3], pp. 334-40, Henderson and Quandt [4], pp. 401-2, Naylor and Vernon [5], pp. 63-5, Samuelson [7], p. 55, Silberberg [8], pp. 162-3, Yamane [9], pp. 472-3 など). (8) の j 次の主座小行列式を H_j と表し,

$$(9) \quad H_j = j+1 \quad (j=1, \cdots, n-1)$$

が成立することを証明すれば、 $H_j > 0$ ($j=1, \cdots, n-1$) であり、極小のための2階の条件がえられる。尾崎 [6] は、(8)の各要素の符号がすべて逆である場合に、その主座小行列式が負から始まって交互に負と正を繰り返す、それらの絶対値が $j+1$ になることを帰納法を用いて証明した。この結果を利用すれば、直ちに(9)を証明できるけれども、ここでは異なった方法で(9)を証明する。

最初に、 $j=1$ である場合、(9)が満たされる。次に、 $j \geq 2$ である任意の j について最初に H_j の第1列を $1/2$ 倍して第2列に加えると、第1行はその最初の要素が2となり、他のすべての要素がゼロになる。その行列式を第1行で展開すると、次のような $j-1$ 次の行列式

$$H_j = 2 \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

をえる。さらに、上の $j-1$ 次の行列式の第1列を $1/3$ 倍して第2列に加え、その結果を第1行で展開すると、

$$H_j = 3 \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

という $j-2$ 次の行列式になる。以下同様の計算を繰り返すと、 j 次の H_j は $j-2$ 回の操作で

$$H_j = \begin{vmatrix} j & -1 \\ -(j-1) & 2 \end{vmatrix}$$

という2次の行列式に帰着する。これより(9)がえられる。

したがって、(9)より(3)は(7)が成立するとき極小になり、この場合最小である（Henderson and Quandt [4], pp. 402-3）。(7)より(3)の最小値は、

$$\begin{aligned} BC(n) &= \frac{hc^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{hc^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1)i + rc \\ &= \frac{hc^2}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{hc^2}{n^2} \frac{(n-1)n(n+1)}{3} + rc \end{aligned}$$

であるから、これより

$$(10) \quad BC(n) = \frac{hc^2}{2} \cdot \frac{(n+1)}{n} + rc$$

となる。(10)より

$$\frac{\partial BC(n)}{\partial n} = -\frac{hc^2}{2n^2} < 0$$

であるから、価格改定の回数 n を多くすればするほど、総購入費用は減少する。また、(1)と(10)より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} BC(n) = \frac{hc^2}{2} + rc = \int_0^c (hq + r) dq$$

であるから、価格改定の回数 n を無限に多くすると、購入費用 $BC(n)$ は第1図の ODEF の面積に等しくなる。したがって、買手独占企業は $q=c$ という数量を一括して $p=hc+r$ という価格で購入するのに比べて限りなく多く価格を改訂して購入するときのほうが生産者余剰 DEG の面積分だけ安く購入できる。

参考文献

- [1] Allen, R. G. D., *Mathematical Analysis for Economists*. London: Macmillan, 1964.
- [2] Benavie, A., *Mathematical Techniques for Economic Analysis*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1972.
- [3] Chiang, A. C., *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. Second Edition, New York: McGraw-Hill Book Co., 1974.
- [4] Henderson, J. M., and Quandt, R. E., *Microeconomic Theory: A Mathematical Approach*. Second Edition, New York: McGraw-Hill Book, 1971.
- [5] Naylor, T. H., and Vernon, J. M., *Microeconomics and Decision Models of the Firm*. New York: Harcourt, Brace & World, 1969.
- [6] 尾崎雄一郎, 「腐敗し易い財に対する最適販売方策」, 『名城論叢』, 第7巻, 第1号(2006年), pp. 43-7.
- [7] Samuelson, P. A., *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1966.
- [8] Silberberg, E., *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*. Second Edition, New York: McGraw-Hill Book Co., 1990.
- [9] Yamane, T., *Mathematics for Economists*. Second Edition, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1968.