

差分方程式による Lanchester モデル

尾 崎 雄一郎

1. はじめに

ある体系の諸変数の時間経過に基づく変動の分析は通常微分方程式や差分方程式によって行われる。Lanchester ([7], Chs. V, VI) は 2 つの対立する集団の戦闘経過を非常に単純化した微分方程式で表し、勝利の要因を N 平方法則と呼ばれる有名な式にまとめ上げた。彼のモデルは極めて複雑な戦闘という行為を簡単な数学を用いて表現したこと、またこの分析から興味深い結論を引き出したことによって注目され、しばしば言及される (たとえば, Braun [2], pp. 403-10, Engel [3], [4], Kármán [6], Luenberger [8], pp. 117-8, Morse and Kimball [9], pp. 63-73, Saaty [10], p. 51, Saaty and Alexander [11], pp. 40-1, Shubik [12], pp. 404-5, Weiss [14] など)。

Lanchester [7] 以来、すべて微分方程式を用いて関連する問題を検討しているけれども、Engel [3] だけが差分(定差)方程式を用いて考察している。本論文において Lanchester モデルを差分方程式を用いて検討し、 N 平方法則を Engel とは異なった方法で導出し、数値例も取り上げる。

2. 差分方程式による Lanchester モデル

2 つの対立する集団があり、第 t 期における第 1 の集団と第 2 の集団の戦闘員の数を決々 $N_1(t)$ と $N_2(t)$ とし、各々の集団内の構成員は同質的であるが、2 つの集団間の構成員は必ずしも同質的ではないものとする。第 1 の集団の 1 人が第 2 の集団の戦闘員を戦いによって無力化する 1 期間当りの打撃力を a_1 、第 2 の集団の 1 人が第 1 の集団の戦闘員に与える打撃力を a_2 とし、これらはともに正で、第 1 期以降の全戦闘期間を通じて一定であるとする。このとき、差分方程式による Lanchester モデルは、

$$(1) \quad N_1(t+1) = N_1(t) - a_2 N_2(t)$$

$$(2) \quad N_2(t+1) = N_2(t) - a_1 N_1(t)$$

と表せる。(1) は第 t 期における第 1 の集団の戦闘員の数 $N_1(t)$ は第 2 の集団によって $a_2 N_2(t)$ だけ損害を蒙り、無力化され、残った人員が第 $t+1$ 期の第 1 の集団の人数 $N_1(t+1)$ となることを表す。(2) についても同様で、第 t 期に第 2 の集団の人数 $N_2(t)$ は第 1 の集団から $a_1 N_1(t)$ の人的損害を受け、残った人員が第 $t+1$ 期の人数 $N_2(t+1)$ となることを表す。初期条件として戦闘前の第 0 期における 2 つの集団の人数を決々 $N_1(0)$ 、 $N_2(0)$ とすると、第 1 期における各々の集団の人数は、(1) と (2) より

$$N_1(1) = N_1(0) - a_2 N_2(0), \quad N_2(1) = N_2(0) - a_1 N_1(0)$$

となる。

(1) と (2) より

$$(3) \quad N_1(t+2) - 2N_1(t+1) + (1 - a_1a_2)N_1(t) = 0$$

という線形の2階同次差分方程式をえる。(3)の特性方程式は

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - a_1a_2 = 0$$

であるから、2つの特性根は

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{a_1a_2}$$

である。したがって、(3)の解は

$$(4) \quad N_1(t) = A_1(1 + \sqrt{a_1a_2})^t + B_1(1 - \sqrt{a_1a_2})^t$$

と表せる(差分方程式の解法については、Baumol [1], Goldberg [5], Spiegel [13]などを参照のこと)。(4)の A_1 と B_1 は初期条件によって定まる定数である。(4)において $t=0$ 、また $t=1$ とし、このときの(1)の値 $N_1(1) = N_1(0) - a_2N_2(0)$ を用いると、

$$A_1 + B_1 = N_1(0)$$

$$(1 + \sqrt{a_1a_2})A_1 + (1 - \sqrt{a_1a_2})B_1 = N_1(0) - a_2N_2(0)$$

となり、この連立方程式を A_1 と B_1 について解くと、

$$(5) \quad A_1 = \frac{1}{2} \left[N_1(0) - \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}} N_2(0) \right], \quad B_1 = \frac{1}{2} \left[N_1(0) + \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}} N_2(0) \right]$$

となる。ゆえに、(3)の一般解は(4)と(5)より

$$(6) \quad N_1(t) = \frac{1}{2} \left[N_1(0) - \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}} N_2(0) \right] (1 + \sqrt{a_1a_2})^t + \frac{1}{2} \left[N_1(0) + \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}} N_2(0) \right] (1 - \sqrt{a_1a_2})^t$$

と表せる。

同様に、(1)と(2)より

$$(7) \quad N_2(t+2) - 2N_2(t+1) + (1 - a_1a_2)N_2(t) = 0$$

となる。(7)の特性方程式は前と同じであるから、(7)を解くと、

$$(8) \quad N_2(t) = A_2(1 + \sqrt{a_1a_2})^t + B_2(1 - \sqrt{a_1a_2})^t$$

と表せる。ここで、 A_2 と B_2 は初期条件によって決定される定数である。(8)において $t=0$ 、また $t=1$ とし、このときの(2)の値 $N_2(1) = N_2(0) - a_1N_1(0)$ を用いると、

$$A_2 + B_2 = N_2(0)$$

$$(1 + \sqrt{a_1a_2})A_2 + (1 - \sqrt{a_1a_2})B_2 = N_2(0) - a_1N_1(0)$$

となり、この連立方程式を A_2 と B_2 について解くと、

$$(9) \quad A_2 = \frac{1}{2} \left[-\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}} N_1(0) + N_2(0) \right], \quad B_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}} N_1(0) + N_2(0) \right]$$

となる。したがって、(7)の一般解は(8)と(9)より

$$(10) \quad N_2(t) = \frac{1}{2} \left[-\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}} N_1(0) + N_2(0) \right] (1 + \sqrt{a_1a_2})^t + \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}} N_1(0) + N_2(0) \right] (1 - \sqrt{a_1a_2})^t$$

と表せる。

3. 差分方程式における N 平方法則

最初に,

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{a_1} N_1(0) - \sqrt{a_2} N_2(0), \quad F = \sqrt{a_1} N_1(0) + \sqrt{a_2} N_2(0) \\ g &= 1 + \sqrt{a_1 a_2}, \quad h = 1 - \sqrt{a_1 a_2} \end{aligned}$$

と定めると, (5) の A_1 , B_1 , (9) の A_2 , B_2 は

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2\sqrt{a_1}} \left[\sqrt{a_1} N_1(0) - \sqrt{a_2} N_2(0) \right] = \frac{1}{2\sqrt{a_1}} E \\ B_1 &= \frac{1}{2\sqrt{a_1}} \left[\sqrt{a_1} N_1(0) + \sqrt{a_2} N_2(0) \right] = \frac{1}{2\sqrt{a_1}} F \\ A_2 &= -\frac{1}{2\sqrt{a_2}} \left[\sqrt{a_1} N_1(0) - \sqrt{a_2} N_2(0) \right] = -\frac{1}{2\sqrt{a_2}} E \\ B_2 &= \frac{1}{2\sqrt{a_2}} \left[\sqrt{a_1} N_1(0) + \sqrt{a_2} N_2(0) \right] = \frac{1}{2\sqrt{a_2}} F \end{aligned}$$

と表せる. また, これらより

$$(11) \quad EF = a_1 N_1^2(0) - a_2 N_2^2(0)$$

$$(12) \quad gh = 1 - a_1 a_2$$

$$(13) \quad a_1 A_1^2 - a_2 A_2^2 = \frac{E^2}{4} - \frac{E^2}{4} = 0$$

$$(14) \quad a_1 A_1 B_1 - a_2 A_2 B_2 = \frac{EF}{4} + \frac{EF}{4} = \frac{1}{2} EF$$

$$(15) \quad a_1 B_1^2 - a_2 B_2^2 = \frac{F^2}{4} - \frac{F^2}{4} = 0$$

となる. (4) と (8) は,

$$(16) \quad \begin{aligned} N_1(t) &= A_1 g^t + B_1 h^t \\ N_2(t) &= A_2 g^t + B_2 h^t \end{aligned}$$

と表せる. (16) を用いると,

$$\begin{aligned} a_1 N_1^2(t) &= a_1 [A_1^2 g^{2t} + 2A_1 B_1 g^t h^t + B_1^2 h^{2t}] \\ a_2 N_2^2(t) &= a_2 [A_2^2 g^{2t} + 2A_2 B_2 g^t h^t + B_2^2 h^{2t}] \end{aligned}$$

をえる. したがって, これらより

$$a_1 N_1^2(t) - a_2 N_2^2(t) = (a_1 A_1^2 - a_2 A_2^2) g^{2t} + 2(a_1 A_1 B_1 - a_2 A_2 B_2) g^t h^t + (a_1 B_1^2 - a_2 B_2^2) h^{2t}$$

となり, これに (11) から (15) までを用いると,

$$(17) \quad a_1 N_1^2(t) - a_2 N_2^2(t) = [a_1 N_1^2(0) - a_2 N_2^2(0)] (1 - a_1 a_2)^t$$

という式をえる. ここで,

$$(18) \quad 0 < a_1 a_2 < 1$$

であると仮定すると, (17) と (18) より

$$(19) \quad a_1 N_1^2(0) \equiv a_2 N_2^2(0)$$

の各々に応じて

$$(20) \quad a_1 N_1^2(t) \equiv a_2 N_2^2(t)$$

が成立する(複号同順).

(1) より $N_2(t) > 0$ である限り, $N_1(t+1) < N_1(t)$ であるから, 期間が進行するにつれて第1の集団の人数は減少し, 同様に $N_1(t) > 0$ である限り, 第2の集団の人数は減少し続ける. したがって, (19)において $a_1 N_1^2(0) > a_2 N_2^2(0)$ であるならば, $N_1(t)$ か $N_2(t)$ がゼロになるある $t = \hat{t}$ において $N_1(\hat{t}) = 0, N_2(\hat{t}) > 0$ であることは (20) に矛盾するので, $N_1(\hat{t}) > 0, N_2(\hat{t}) = 0$ でなければならず, 第2の集団の人員が全滅したとき, 第1の集団の人員はその一部分が生き残っており, 第1の集団が第2の集団に勝利する. 同様に, $a_1 N_1^2(0) < a_2 N_2^2(0)$ であるならば, ある期間 $\hat{t}$ において $N_1(\hat{t}) = 0, N_2(\hat{t}) > 0$ となり, 第2の集団が第1の集団に勝利する. 最後に, $a_1 N_1^2(0) = a_2 N_2^2(0)$ であるならば, (17) よりすべての期間において $a_1 N_1^2(t) = a_2 N_2^2(t)$ であり, (6) と (10) より

$$N_1(t) = N_1(0)(1 - a_1 a_2)^t, \quad N_2(t) = N_2(0)(1 - a_1 a_2)^t$$

であるから,

$$\frac{N_1(t)}{N_2(t)} = \frac{N_1(0)}{N_2(0)} = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$$

が成立する. これより2つの集団の人員は每期同じ比率を保ちながら, 減少し続け, 1つの集団がもう1つの集団を全滅させることはない. 以上より, (19)に基づいてどちらの集団が戦闘において勝利するか判断できる. (19)によって表される関係のことを Lanchester の N 平方法則という.

なお, t 期における2つの集団の人的な成長率を各々 $G_1(t), G_2(t)$ とし,

$$G_1(t) = \frac{N_1(t+1) - N_1(t)}{N_1(t)}, \quad G_2(t) = \frac{N_2(t+1) - N_2(t)}{N_2(t)}$$

と表し, 両集団の人的損耗率を $D_1(t), D_2(t)$ とし,

$$D_1(t) = \frac{a_2 N_2(t)}{N_1(t)}, \quad D_2(t) = \frac{a_1 N_1(t)}{N_2(t)}$$

と表すと, (1) と (2) はこれらを用いて

$$G_1(t) = -D_1(t), \quad G_2(t) = -D_2(t)$$

と表せる. これらより $N_1(t) > 0, N_2(t) > 0$ であるならば, $D_1(t) > 0, D_2(t) > 0$ であり, $G_1(t) < 0, G_2(t) < 0$ である.

3. 数値例

最初に,

$$\begin{aligned} N_1(0) &= 100, & N_2(0) &= 200 \\ a_1 &= 0.2, & a_2 &= 0.1 \end{aligned}$$

という場合について考察する. この場合, (19) は

$$a_1 N_1^2(0) = 2,000 < 4,000 = a_2 N_2^2(0)$$

であるから, 第2の集団が第1の集団に勝利する.

このとき, 差分方程式 (1), (2) と初期条件は,

$$N_1(t+1) = N_1(t) - 0.1 N_2(t), \quad N_1(0) = 100$$

$$N_2(t+1) = N_2(t) - 0.2N_1(t), \quad N_2(0) = 200$$

となる。(5) と (9) より

$$A_1 = \frac{1}{2} \left[N_1(0) - \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} N_2(0) \right] = \frac{1}{2} \left(100 - \sqrt{\frac{0.1}{0.2}} \times 200 \right) = -20.710678$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \left[N_1(0) + \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} N_2(0) \right] = \frac{1}{2} \left(100 + \sqrt{\frac{0.1}{0.2}} \times 200 \right) = 120.710678$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left[-\sqrt{\frac{a_1}{a_2}} N_1(0) + N_2(0) \right] = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{0.2}{0.1}} \times 100 + 200 \right) = 29.289322$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{a_1}{a_2}} N_1(0) + N_2(0) \right] = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{0.2}{0.1}} \times 100 + 200 \right) = 170.710678$$

であり, また

$$g = 1 + \sqrt{a_1 a_2} = 1 + \sqrt{0.2 \times 0.1} = 1.141421$$

$$h = 1 - \sqrt{a_1 a_2} = 1 - \sqrt{0.2 \times 0.1} = 0.858579$$

であるから, 差分方程式の一般解は, (6) と (10) より

$$N_1(t) = -20.710678(1.141421)^t + 120.710678(0.858579)^t$$

$$N_2(t) = 29.289322(1.141421)^t + 170.710678(0.858579)^t$$

となる.

これらの差分方程式の一般解, あるいは初期条件に基づいた逐次解法によって各期の 2 つの集団の人数を求めると, 第 1 表のようになり, これらを描くと第 1 図のようになる (数字は丸めてある). この場合, 第 2 の集団が第 6 期を少し過ぎて第 1 の集団を完全に無力化することがわかる.

表 1 表

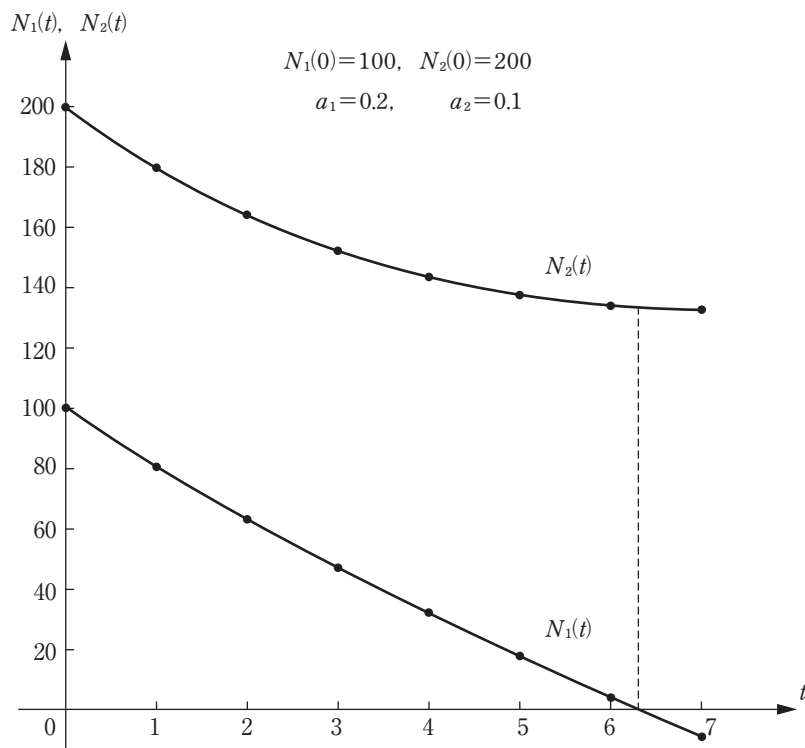
t	$N_1(t)$	$N_2(t)$
0	100	200
1	80 = 100 - 20	180 = 200 - 20
2	62 = 80 - 18	164 = 180 - 16
3	45.6 = 62.0 - 16.4	151.6 = 164 - 12.4
4	30.44 = 45.6 - 15.16	142.48 = 151.6 - 9.12
5	16.19 = 30.44 - 14.25	136.39 = 142.48 - 6.09
6	2.55 = 16.19 - 13.64	133.15 = 136.39 - 3.24
7	-10.77 = 2.55 - 13.32	132.64 = 133.15 - 0.51

次に,

$$N_1(0) = 100, \quad N_2(0) = 200$$

$$a_1 = 0.4, \quad a_2 = 0.1$$

という場合について検討する. この場合,



第1図

$$a_1 N_1^2(0) = 4,000 = a_2 N_2^2(0)$$

であるから、2つの集団の戦力は等しい。

このとき、差分方程式 (1), (2) と初期条件は、

$$\begin{aligned} N_1(t+1) &= N_1(t) - 0.1N_2(t), & N_1(0) &= 100 \\ N_2(t+1) &= N_2(t) - 0.4N_1(t), & N_2(0) &= 200 \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \left[N_1(0) - \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} N_2(0) \right] = \frac{1}{2} (100 - 0.5 \times 200) = 0 \\ B_1 &= \frac{1}{2} \left[N_1(0) + \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} N_2(0) \right] = \frac{1}{2} (100 + 0.5 \times 200) = 100 \\ A_2 &= \frac{1}{2} \left[-\sqrt{\frac{a_1}{a_2}} N_1(0) + N_2(0) \right] = \frac{1}{2} (-2 \times 100 + 200) = 0 \\ B_2 &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{a_1}{a_2}} N_1(0) + N_2(0) \right] = \frac{1}{2} (2 \times 100 + 200) = 200 \\ g &= 1 + \sqrt{a_1 a_2} = 1 + \sqrt{0.4 \times 0.1} = 1.2 \\ h &= 1 - \sqrt{a_1 a_2} = 1 - \sqrt{0.4 \times 0.1} = 0.8 \end{aligned}$$

であるから、差分方程式の一般解は、

$$N_1(t) = 100(0.8)^t$$

$$N_2(t) = 200(0.8)^t$$

となる。この場合、 A_1 と A_2 がゼロであるので、 g の値がどのようなものであっても解に影響しない。

これらの差分方程式の一般解、または逐次解法によって両方の集団の人数の推移を求めると、第 2 表のようになり、これらを描くと第 2 図のようになる。すべての期において第 1 と第 2 の集団の人数の比率は 1 : 2 であり、一方が他方を凌駕することはない。

表 2 表

t	$N_1(t)$	$N_2(t)$
0	100	200
1	80 = 100 - 20	160 = 200 - 40
2	64 = 80 - 16	128 = 160 - 32
3	51.2 = 64 - 12.8	102.4 = 128 - 25.6
4	40.96 = 51.2 - 10.24	81.92 = 102.4 - 20.48
5	32.77 = 40.96 - 8.19	65.54 = 81.92 - 16.38
6	26.22 = 32.77 - 6.55	52.43 = 65.54 - 13.11
7	20.98 = 26.22 - 5.24	41.94 = 52.43 - 10.49
8	16.79 = 20.98 - 4.19	33.55 = 41.94 - 8.39
9	13.43 = 16.79 - 3.36	26.84 = 33.55 - 6.71
10	10.75 = 13.43 - 2.68	21.47 = 26.84 - 5.37

最後に、

$$N_1(0) = 100, \quad N_2(0) = 200$$

$$a_1 = 0.5, \quad a_2 = 0.1$$

という場合について考察する。この場合、(19) は

$$a_1 N_1^2(0) = 5,000 > 4,000 = a_2 N_2^2(0)$$

であるから、第 1 の集団が第 2 の集団に勝利する。

このとき、(1), (2) と初期条件を表すと、

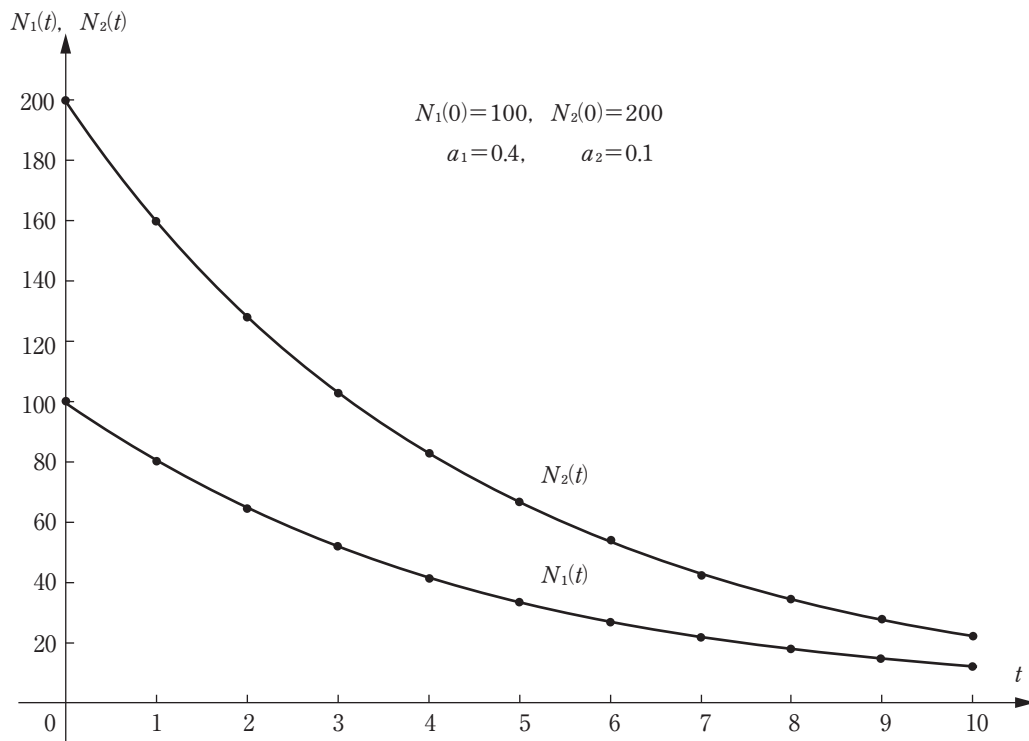
$$N_1(t+1) = N_1(t) - 0.1N_2(t), \quad N_1(0) = 100$$

$$N_2(t+1) = N_2(t) - 0.5N_1(t), \quad N_2(0) = 200$$

となる。また、

$$A_1 = \frac{1}{2} \left[N_1(0) - \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} N_2(0) \right] = \frac{1}{2} \left(100 - \sqrt{\frac{0.1}{0.5}} \times 200 \right) = 5.28$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \left[N_1(0) + \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} N_2(0) \right] = \frac{1}{2} \left(100 + \sqrt{\frac{0.1}{0.5}} \times 200 \right) = 94.72$$



第2図

$$A_2 = \frac{1}{2} \left[-\sqrt{\frac{a_1}{a_2}} N_1(0) + N_2(0) \right] = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{0.5}{0.1}} \times 100 + 200 \right) = -11.805$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{a_1}{a_2}} N_1(0) + N_2(0) \right] = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{0.5}{0.1}} \times 100 + 200 \right) = 211.805$$

$$g = 1 + \sqrt{a_1 a_2} = 1 + \sqrt{0.5 \times 0.1} = 1.2236$$

$$h = 1 - \sqrt{a_1 a_2} = 1 - \sqrt{0.5 \times 0.1} = 0.7764$$

であるから、差分方程式の一般解は、

$$N_1(t) = 5.28(1.2236)^t + 94.72(0.7764)^t$$

$$N_2(t) = -11.805(1.2236)^t + 211.805(0.7764)^t$$

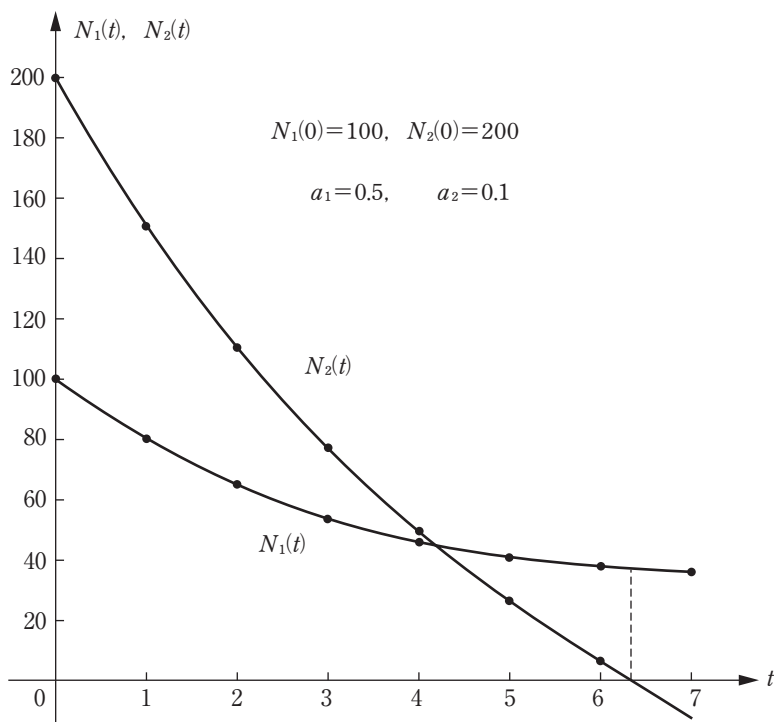
である。

これらの差分方程式の一般解、または逐次解法による各期における2つの集団の人数は第3表のようになる。

表 3 表

t	$N_1(t)$	$N_2(t)$
0	100	200
1	80 = 100 - 20	150 = 200 - 50
2	65 = 80 - 15	110 = 150 - 40
3	54 = 65 - 11	77.5 = 110 - 32.5
4	46.25 = 54 - 7.75	50.5 = 77.5 - 27.0
5	41.20 = 46.25 - 5.05	27.37 = 50.5 - 23.13
6	38.46 = 41.20 - 2.74	6.77 = 27.37 - 20.60
7	37.78 = 38.46 - 0.68	-12.46 = 6.77 - 19.23

これらを描くと第 3 図のようになり、初期においては第 1 の集団の人数が第 2 の集団より少ないが、第 4 期を過ぎたところで逆転し、結局第 1 の集団が第 2 の集団に勝利することがわかる。



第 3 図

謝辞

本論文は名城大学経済・経営学会から受けた2006年度研究助成による研究成果の一部である。
この助成に対して感謝する。

参考文献

- [1] Baumol, W. J., *Economic Dynamics : An Introduction*. Third Edition, London : Macmillan, 1970.
- [2] Braun, M., *Differential Equations and Their Applications*. Third Edition, New York : Springer-Verlag, 1983.
- [3] Engel, J. H., "Comments on a Paper by H. K. Weiss," *Operations Research*, Vol. 11 (1963), pp. 147-50.
- [4] Engel, J. H., "Lanchester's Equations," in Gass, S. I., and Harris, C. M. (eds.), *Encyclopedia of Operations Research and Management Science*. Boston, Mass. : Kluwer Academic Publishers, 1996, pp. 327-30.
- [5] Goldberg, S., *Introduction to Difference Equations*. New York : John Wiley & Sons, 1958.
- [6] Kármán, T. von, "Lanchester's Contributions to the Theory of Flight and Operational Research," *Journal of the Royal Aeronautical Society*, Vol. 62 (1958), pp. 80-93.
- [7] Lanchester, F. W., *Aircraft in Warfare : The Dawn of the Fourth Arm*. London : Constable and Co., 1916. Reprinted in Newman, J. R. (ed.), *The World of Mathematics*. Vol. 4, New York : Simon and Schuster, 1956, pp. 2138-57.
- [8] Luenberger, D. G., *Introduction to Dynamic Systems : Theory, Models, and Applications*. New York : John Wiley & Sons, 1979.
- [9] Morse, P. M., and Kimball, G. E., *Methods of Operations Research*. First Revised Edition, New York : John Wiley & Sons, 1951.
- [10] Saaty, T. L., *Mathematical Models of Arms Control and Disarmament : Application of Mathematical Structures in Politics*. New York : John Wiley & Sons, 1968.
- [11] Saaty, T. L., and Alexander, J. M., *Thinking with Models : Mathematical Models in the Physical, Biological and Social Sciences*. Oxford : Pergamon Press, 1981.
- [12] Shubik, M., *Game Theory in the Social Sciences : Concepts and Solution*. Cambridge, Mass. : The MIT Press, 1982.
- [13] Spiegel, M. R., *Theory and Problems of Calculus of Finite Differences and Difference Equations*. New York : McGraw-Hill Book Co., 1971.
- [14] Weiss, H. K., "The Fiske Model of Warfare," *Operations Research*, Vol. 10 (1962), pp. 569-71.