

投入産出モデルにおける比較静学分析の幾何学的表示

尾 崎 雄一郎

1. はじめに

投入産出分析における比較静学分析は、ある産業の最終需要が変化するとき、すべての産業の総生産量はどのように変化するか、ある産業の付加価値が変化するとき、すべての産業の生産物価格はどのように変化するか等の問題について考察する。森嶋〔3〕, pp. 79-98)は2部門モデルで幾分簡単に、Morishima〔4〕, pp. 14-21)は n 部門モデルで厳密にこのような比較静学分析を行なった。尾崎〔6〕は、同じく n 部門でMorishima〔4〕の比較静学分析に関する幾つかの定理を別の方法で証明した。

この論文の目的は投入産出分析における比較静学に関する幾つかの定理を2部門モデルで幾何学的に示すことにある。各産業の最終需要に対して各産業の総生産量を求める問題は、各産業の付加価値に対して各産業の生産物価格を求める問題と双対関係にあるから、一方の分析は他方の分析に容易に適用できる。それ故、この論文では総生産量に関する分析に限定する。投入産出モデルの幾何学的分析の利点は、行列や行列式の知識がなくても、幾何学に関する基礎的な知識で定理の本質的な内容が容易に理解できることにある。

2. 2部門の投入産出モデル

2つの産業から成り立つ経済を考え、 a_{ij} ($i, j = 1, 2$)を第 j 産業の生産物を1単位生産するのに必要な第 i 産業の生産物の量、 c_i を第 i 産業の生産物に対する最終需要、 x_j を第 j 産業の総生産量とする。両産業の均衡条件は、

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + c_1$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + c_2$$

である。これらを整理すると、

$$(1) \quad \begin{aligned} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 &= c_1 \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 &= c_2 \end{aligned}$$

となる。投入係数行列が分解不能 (Debreu and Herstein〔1〕, Morishima〔4〕, p. 14, 二階堂〔5〕, pp. 133-5 など)であるとすると、2部門モデルの場合

$$(2) \quad a_{12} > 0, \quad a_{21} > 0$$

でなければならない。他に、 $a_{11} \geq 0$, $a_{22} \geq 0$ であるとする。また、(1)の係数行列がHawkins-Simon条件(Hawkins and Simon〔2〕, Morishima〔4〕, p. 15, 二階堂〔5〕, pp. 12-3 など)を満たす、すなわち

$$(3) \quad a_{11} < 1, \quad a_{12}a_{21} < (1-a_{11})(1-a_{22})$$

であるとし、さらに最終需要について

$$(4) \quad c_1 > 0, \quad c_2 \geq 0$$

であると仮定する.

横軸に x_1 , 縦軸に x_2 を測って (1) の 2 つの直線を描く. (2) と (3) より

$$0 < \frac{a_{21}}{1-a_{22}} < \frac{1-a_{11}}{a_{12}}$$

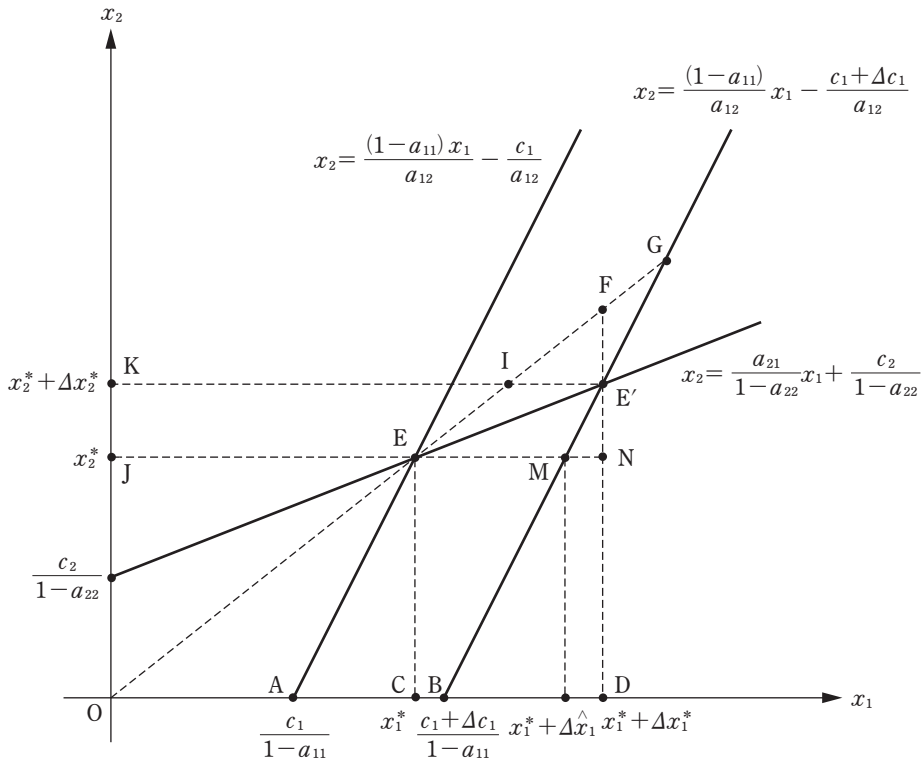
であるから, (1) の最初の式が表す直線の傾きは 2 番目の式が表す直線の傾きより大きく, (4) を考慮すると, 2 つの直線は第 1 図のように第 1 象限 (の点 E) で交わる. いま,

$$(5) \quad H = (1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}$$

とすると, (3) より $H > 0$ である. (1) の解 x_j^* ($j=1, 2$) は, 第 1 図の記号とともに,

$$(6) \quad x_1^* = \frac{(1-a_{22})c_1 + a_{12}c_2}{H} = CO, \quad x_2^* = \frac{a_{21}c_1 + (1-a_{11})c_2}{H} = JO$$

と表せる. したがって, 分解不能性の条件 (2) と Hawkins-Simon 条件 (3) が成立し, さらに (4) が成立するならば, (6) で示される (1) の解はともに正である.



第 1 図

3. 比較静学分析

第1産業の最終需要が c_1 から $c_1 + \Delta c_1$ に増加し、第2産業の最終需要は c_2 のまま不変である、すなわち

$$(7) \quad \Delta c_1 > 0, \quad \Delta c_2 = 0$$

であるとする。このとき、(1)は

$$(8) \quad \begin{aligned} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 &= c_1 + \Delta c_1 \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 &= c_2 \end{aligned}$$

となる。第1図において(8)の最初の式が表す直線は、 c_1 が増加する前の直線より右方にあり、2番目の式が表す直線と点E'で交わる。(8)に対する解を(1)の解からの偏位として $x_j^* + \Delta x_j^*$ ($j=1, 2$)と表すと、第1図の記号とともに、

$$(9) \quad x_1^* + \Delta x_1^* = \frac{(1 - a_{22})(c_1 + \Delta c_1) + a_{12}c_2}{H} = \text{DO}, \quad x_2^* + \Delta x_2^* = \frac{a_{21}(c_1 + \Delta c_1) + (1 - a_{11})c_2}{H} = \text{KO}$$

である。(3)、(4)、(5)と(7)より $x_j^* + \Delta x_j^* > 0$ ($j=1, 2$)であり、(6)と(9)より

$$(10) \quad \Delta x_1^* = \frac{(1 - a_{22})\Delta c_1}{H} = \text{DC} = \text{NE}, \quad \Delta x_2^* = \frac{a_{21}\Delta c_1}{H} = \text{KJ}$$

となる。したがって、(2)から(5)、(7)、(10)より

$$(11) \quad \Delta x_j^* > 0 \quad (j=1, 2)$$

である。(11)よりある産業の最終需要が増加すると、両産業の総生産量は増加する。第1図より

$$\frac{\Delta c_1}{1 - a_{11}} = \text{BA} = \text{ME} < \text{NE} = \text{DC} = \Delta x_1^*$$

であるから、(3)の最初の不等式に注意すると、

$$(12) \quad \Delta c_1 < (1 - a_{11})\Delta x_1^* \leq \Delta x_1^*$$

をえる。同様に、代数的には(10)の最初の式より

$$\Delta x_1^* - \Delta c_1 = \frac{[(1 - a_{22})a_{11} + a_{12}a_{21}]\Delta c_1}{H} > 0$$

であるから、これと(3)、(5)、(7)より(12)をえる。(12)より最終需要が増加した産業の総生産量の増加分 Δx_1^* は最終需要の増加分 Δc_1 より大きい。

次に、第1図より

$$\frac{c_1}{1 - a_{11}} = \text{AO}, \quad \frac{\Delta c_1}{1 - a_{11}} = \text{BA}$$

であるから、

$$\frac{\Delta c_1}{c_1} = \frac{\text{BA}}{\text{AO}}$$

であり、三角形OAEとOBGが相似であるから、これより

$$(13) \quad \frac{\Delta c_1}{c_1} = \frac{\text{BA}}{\text{AO}} = \frac{\text{GE}}{\text{EO}}$$

である。また、三角形OCEとODFが相似であるから、

$$\frac{\text{DC}}{\text{CO}} = \frac{\text{FE}}{\text{EO}}$$

であり、(6)と(10)、また第1図より

$$(14) \quad \frac{\Delta x_1^*}{x_1^*} = \frac{(1-a_{22})\Delta c_1}{(1-a_{22})c_1 + a_{12}c_2} = \frac{DC}{CO} = \frac{FE}{EO}$$

である。同様に、三角形 OJE と OKI が相似であるから、

$$\frac{KJ}{JO} = \frac{IE}{EO}$$

であり、(6)と(10)、第1図より

$$(15) \quad \frac{\Delta x_2^*}{x_2^*} = \frac{a_{21}\Delta c_1}{a_{21}c_1 + (1-a_{11})c_2} = \frac{KJ}{JO} = \frac{IE}{EO}$$

である。さらに、 $\Delta c_1/c_1$ と $\Delta x_1^*/x_1^*$ の関係は、第1図において $c_2 > 0$ ならば $FE < GE$ 、 $c_2 = 0$ ならば $FE = GE$ となるから、(13)と(14)より

$$(16) \quad \frac{\Delta x_1^*}{x_1^*} = \frac{FE}{EO} \leq \frac{GE}{EO} = \frac{\Delta c_1}{c_1}$$

が成立する。同様に、代数的には(13)と(14)より

$$\frac{\Delta c_1}{c_1} - \frac{\Delta x_1^*}{x_1^*} = \frac{a_{12}c_2}{(1-a_{22})c_1 + a_{12}c_2} \cdot \frac{\Delta c_1}{c_1} \geq 0$$

となり、(2)から(4)と(7)に注意すると、上式より(16)を示せる。また、 $\Delta x_1^*/x_1^*$ と $\Delta x_2^*/x_2^*$ の関係は、第1図において $c_2 > 0$ ならば $IE < FE$ 、 $c_2 = 0$ ならば $IE = FE$ であるから、(14)と(15)より

$$(17) \quad \frac{\Delta x_2^*}{x_2^*} = \frac{IE}{EO} \leq \frac{FE}{EO} = \frac{\Delta x_1^*}{x_1^*}$$

が成立する。同じく、代数的には(14)と(15)より

$$\frac{\Delta x_1^*}{x_1^*} - \frac{\Delta x_2^*}{x_2^*} = \frac{c_2 H \Delta c_1}{[(1-a_{22})c_1 + a_{12}c_2][a_{21}c_1 + (1-a_{11})c_2]} \geq 0$$

であり、これと(3)、(4)、(5)より(17)をえる。したがって、(16)と(17)より最終需要の増加率 $\Delta c_1/c_1$ 、最終需要が増加した産業の総生産量の増加率 $\Delta x_1^*/x_1^*$ 、他の産業の総生産量の増加率 $\Delta x_2^*/x_2^*$ の3つの大小関係は、 $c_2 > 0$ であるときにはこの順になり、 $c_2 = 0$ であるときにはすべて等しくなる。

最後に、第1産業の最終需要だけが增加すると、第1産業の総生産量の増加分 Δx_1^* は、既に見たように、(10)で与えられる。次に、第1産業の最終需要だけが增加するけれども、第2産業の総生産量はある水準に固定されたままであるという状況の下での第1産業の総生産量の増加分を $\hat{\Delta x}_1$ とすると、

$$(18) \quad \Delta x_1^* > \hat{\Delta x}_1 > 0$$

が成立すること (Le Chatelier-Samuelson 原理) を以下において証明する。

(8)の最初の方程式(2番目の式は除いて考察する)において簡単化のために $x_2 = x_2^*$ と固定する(一般的には x_2 は x_2^* に限定される必要はない)と、

$$(19) \quad (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2^* = c_1 + \Delta c_1$$

と表せる。(19)を満たす x_1 の値は、第1図の点 B と E' を通る直線上の $x_2^* = JO$ を満たす点 M によって与えられる。(19)を満たす x_1 の値を(6)の x_1^* からの偏位として $x_1^* + \hat{\Delta x}_1$ と表すと、

$$x_1^* + \Delta \hat{x}_1 = \frac{c_1 + \Delta c_1 + a_{12}x_2^*}{1 - a_{11}} = \text{MJ}$$

と表せる。これに(6)の x_1^* と x_2^* を代入して整理すると、

$$(20) \quad \Delta \hat{x}_1 = \frac{\Delta c_1}{1 - a_{11}} = \text{ME} > 0$$

となる。(20)と(2), (3), (5), (10)より

$$\Delta x_1^* = \frac{(1 - a_{22})\Delta c_1}{H} = \text{NE} > \text{ME} = \frac{\Delta c_1}{1 - a_{11}} = \Delta \hat{x}_1 > 0$$

をえる。ゆえに、(18)が証明された。

参考文献

- [1] Debreu, G., and Herstein, I. N., “Nonnegative Square Matrices,” *Econometrica*, Vol. 21 (1953), pp. 597-607.
- [2] Hawkins, D., and Simon, H. A., “Note: Some Conditions of Macroeconomic Stability,” *Econometrica*, Vol. 17 (1949), pp. 245-8.
- [3] 森嶋通夫, 『産業連関論入門』, 東京, 創文社, 1956年.
- [4] Morishima, M., *Equilibrium, Stability, and Growth*. Oxford: Clarendon Press, 1964.
- [5] 二階堂副包, 『現代経済学の数学的方法』, 東京, 岩波書店, 1960年.
- [6] 尾崎雄一郎, 「投入産出分析における比較静学分析」, 『名城論叢』, 第7巻, 第2号 (2006年), pp. 35-42.