

需要の弧弾力性について

尾 崎 雄一郎

1. はじめに

需要の価格弾力性という概念が A. Marshall によって 1881 年にはじめて創出され (Keynes [8], Pigou 版 p. 45, n. 2, Newman [13]), さらに需要曲線上の 1 点における価格弾力性を幾何学的に表わす方法も彼によって明らかにされた (Marshall [11]). それ以来彼の有名な *Principles* においてその図による方法が説明されている (Marshall [12], pp. 102-103, n., 839-840). 現在においても彼の図による方法が多くの中微経済学の教科書において説明されている (たとえば, Asimakopulos [2], pp. 26-28, Ferguson and Maurice [4], pp. 30-33, Mansfield [10], pp. 111-113, Samuelson and Nordhaus [14], pp. 427-428, Stigler [15], pp. 330-331 など). 需要の価格弾力性は概念として重要であるばかりでなく, 価格が変化するとき総収入の変化が需要の価格弾力性の値に依存することでも重要である (たとえば, Asimakopulos [2], pp. 25-26, 228-229, Baumol [3], pp. 177-179, Friedman [5], p. 21, Samuelson and Nordhaus [14], pp. 425-426, Stigler [15], pp. 333-336, Varian [17], pp. 268-270 など).

需要曲線上の 1 つの点における価格の点弾力性に対して 2 点間の弧弾力が H. Dalton によって 1920 年に考え出された (Allen [1], Lerner [9], Newman [13]). 価格の変化が大きいときには, 点弾力性よりも弧弾力性のほうが適切であるけれども, Dalton や Lerner [9] による弧弾力性の定義では 2 つの点のどちらを基準にして百分率変化を測定するかによって弾力性を 2 通りの方法で定義することができ, 不明瞭さが残るといった難点があった. Allen [1] は弧弾力性の幾つかの定義を検討する中で, 2 点間の中点を用いて価格と需要量の百分率変化を取り扱う定義をはじめて導入し, これにより弧弾力性は一義的に定義でき, 難点が解消された. 現在 Allen によるこの定義が弧弾力性の定義として定着している (たとえば, Asimakopulos [2], pp. 29-30, Baumol [3], pp. 174-175, Ferguson and Maurice [4], p. 30, Gill [6], pp. 26-27, Mansfield [10], p. 26, Samuelson and Nordhaus [14], pp. 424-426, Stigler [15], pp. 25, 331-333 など). Holt and Samuelson [7] は価格の点弾力性や弧弾力性の値を正確に決定するのではないけれども, 弾力的か, 非弾力的か, 1 に等しいかを図を利用して概略的に判断する方法を示した.

弧弾力性は価格の変化が大きい場合に限らず, 需要曲線が折れ曲がっていても測定できるという点でも点弾力性より優れている. しかし, 現在に到るまで価格の弧弾力性の値を図を利用して求める方法や, 需要の弧弾力性と総収入の変化の関係が一般的に示されたことはない. また, 所得が変化するとき, ある財の所得の点弾力性の値によって所得に占める当該財の支出額の割合が増加したり, 減少したりすることが知られている (たとえば, Friedman [5], pp. 45-46, Stiglitz [16], p. 203 など) けれども, 所得の弧弾力性を用いてこのことが示されたことはない. このように需要の点弾

力性に比べて弧弾力性の取り扱いには不十分なところがある。本論文において、需要の価格弧弾力性を図を利用して測定する方法や、価格の弧弾力性を用いて価格の変化に基づく総収入の変化がどのようなになるかを明らかにし、さらに所得の弧弾力性を用いて所得の変化に基づく当該財の支出額の所得に占める割合がどのように変化するかを示す。

2. 価格の弧弾力性の図を利用した測定

ある財の価格を p 、需要量を q 、需要曲線を DD' とし、価格が p_1 であるときの需要量を q_1 、価格が p_2 であるときの需要量を q_2 とする。これら需要曲線上の2点間の価格の弧弾力性 η_D は、価格の百分率変化に対する需要量の百分率変化で、

$$(1) \quad \eta_D = - \frac{(q_2 - q_1)}{\left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right)} \div \frac{(p_2 - p_1)}{\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right)}$$

と定義される。ここで、価格と需要量の百分率変化は各々変化前と変化後の平均の値、 $(p_1 + p_2)/2$ と $(q_1 + q_2)/2$ とを基準にし、右下りの需要曲線の下では価格の変化と需要量の変化の方向は逆になるから、マイナスの符号をつけて η_D が負にならないようにする。一般性を失うことなく、

$$(2) \quad p_1 < p_2, \quad q_1 > q_2$$

と仮定でき、(1)式と(2)式に注意して

$$(3) \quad \eta_D = \frac{\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right)}{\left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right)} \div \frac{(p_2 - p_1)}{(q_1 - q_2)}$$

と表せる。第1図において需要曲線上の点 (q_1, p_1) と (q_2, p_2) を各々点 A_1 と A_2 とし、点 A_1 と A_2 を結ぶ直線を α 、点 A_1 と A_2 の中点を C とし、原点 O と点 C を結ぶ直線を β とする。第1図より

$$\frac{p_2 - p_1}{q_1 - q_2} = \frac{A_2B}{A_1B} = \text{直線 } \alpha \text{ の傾きの絶対値}$$

$$\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right) \div \left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right) = \frac{CH}{HO} = \text{直線 } \beta \text{ の傾き}$$

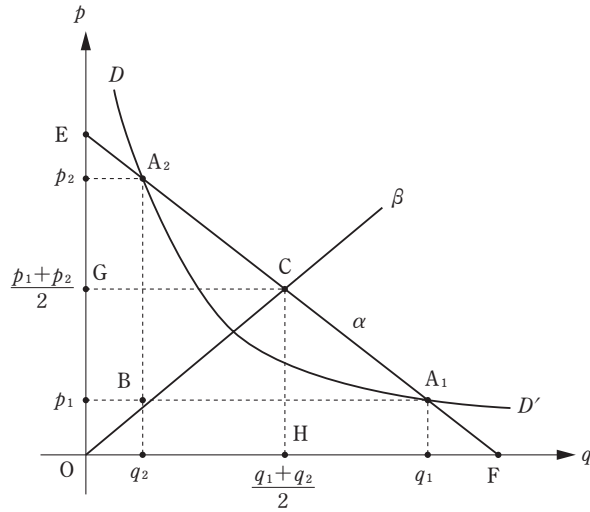
となる。したがって、(3)式より

$$(4) \quad \eta_D = \frac{CH}{HO} \div \frac{A_2B}{A_1B} = \frac{\text{直線 } \beta \text{ の傾き}}{\text{直線 } \alpha \text{ の傾きの絶対値}}$$

と表せる。(4)式に基づいて需要曲線上の任意の2点に関する価格の弧弾力性が図を利用して測定できる。また、(4)式の η_D は、三角形の相似を利用して

$$\eta_D = \frac{GO}{EG} = \frac{CF}{EC} = \frac{FH}{HO}$$

と表すこともできる。



第1図

3. 需要曲線が直線である場合

需要曲線が直線で、

$$(5) \quad p = -aq + b \quad (a > 0, b > 0)$$

と表されるとき、この需要曲線上の2つの点 $A_1(q_1, p_1)$ と $A_2(q_2, p_2)$ に対する価格の弧弾力性を図を利用して表す。この場合、第2図におけるように点 A_1 と A_2 を結んだ直線 α は(5)式の需要曲線と一致するから、点 A_1 と A_2 が直線上の何処にあっても、

$$(6) \quad \text{直線 } \alpha \text{ の傾きの絶対値} = a$$

となる。(5)式より

$$p_1 = -aq_1 + b, \quad p_2 = -aq_2 + b$$

であるから、点 A_1 と A_2 の中点 C の座標 $\left(\frac{q_1+q_2}{2}, \frac{p_1+p_2}{2}\right)$ の間には、

$$\frac{p_1+p_2}{2} = -a\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right) + b$$

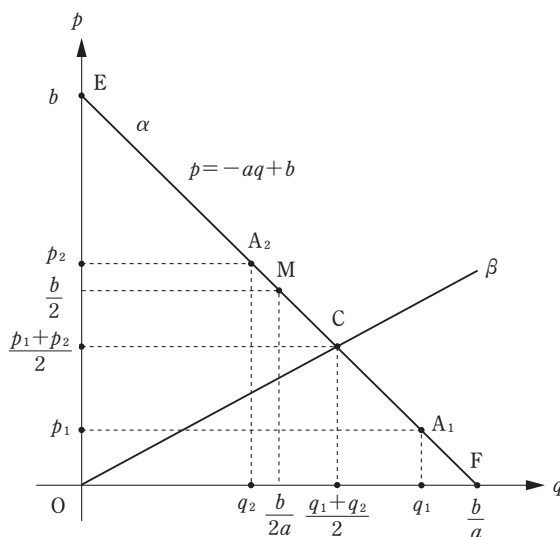
という関係がある。この式より原点 O と点 C を結ぶ直線 β の傾きは、

$$(7) \quad \text{直線 } \beta \text{ の傾き} = \frac{(p_1+p_2)/2}{(q_1+q_2)/2} = -a + \frac{b}{\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)}$$

となる。したがって、(4)式の弧弾力性 η_D は、(6)式と(7)式を用いて

$$(8) \quad \eta_D = \frac{\text{直線 } \beta \text{ の傾き}}{\text{直線 } \alpha \text{ の傾きの絶対値}} = -1 + \frac{b}{a\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)}$$

と表せる。



第2図

第2図から明らかなように、点Cが点EとFの中点Mより左上方にあるときには、 $(q_1+q_2)/2 < b/2a$ であるから、(8)式より $\eta_D > 1$ であり、点Cが中点Mと一致するときには、 $(q_1+q_2)/2 = b/2a$ より $\eta_D = 1$ であり、点Cが中点Mより右下方にあるときには、 $(q_1+q_2)/2 > b/2a$ であるから、 $\eta_D < 1$ であり、点Cが点Eから点Fに近づくにつれて η_D は次第に小さくなる(以上の結果の逆の関係も成立する)。特に、点Cが点Eと一致する極限においては $(q_1+q_2)/2 = 0$ であるので、 $\eta_D = \infty$ となり、点Cが点Fと一致するときには $(q_1+q_2)/2 = b/a$ であるから、 $\eta_D = 0$ となる。さらに、需要曲線が水平である場合には、2点 A_1 と A_2 が曲線上のどこにあっても、直線 α の傾きがゼロであるので、 $\eta_D = \infty$ となり、需要曲線が垂直である場合には、直線 α の傾きの絶対値が無限大であるので、 $\eta_D = 0$ となる。

4. 需要曲線が直角双曲線である場合

需要曲線が直角双曲線で、

$$(9) \quad p = k/q \quad (k > 0)$$

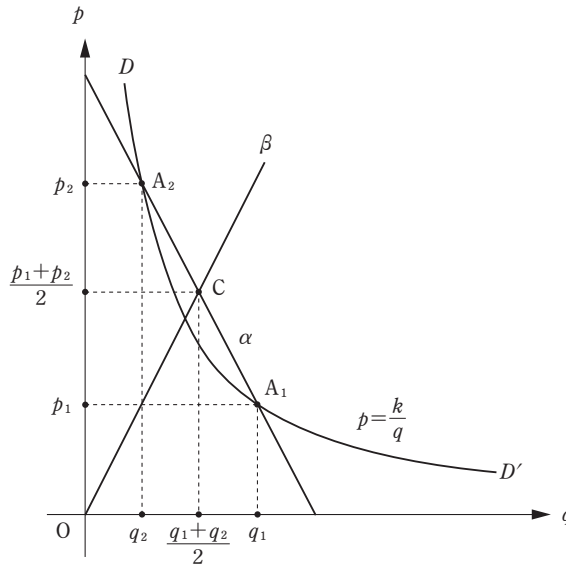
と表されるとき、この需要曲線上の2つの点 $A_1(q_1, p_1)$ と $A_2(q_2, p_2)$ に対する価格の弧弾力性を図を用いて計算する。この場合、2つの点 A_1 と A_2 の座標は、(9)式を用いて

$$(q_1, p_1) = (q_1, k/q_1), \quad (q_2, p_2) = (q_2, k/q_2)$$

と表せるから、2点 A_1 と A_2 を結ぶ直線 α に関して(2)式の下で

$$(10) \quad \text{直線 } \alpha \text{ の傾きの絶対値} = \frac{p_2 - p_1}{q_1 - q_2} = \frac{(k/q_2) - (k/q_1)}{q_1 - q_2} = \frac{k}{q_1 q_2}$$

と表される。この場合、2点 A_1 と A_2 の中点Cの座標は、



第3図

$$\left(\frac{q_1 + q_2}{2}, \frac{p_1 + p_2}{2} \right) = \left(\frac{q_1 + q_2}{2}, \frac{kq_1 + kq_2}{2q_1q_2} \right)$$

であるから、原点 O と点 C を結ぶ直線 β の傾きは、

$$(11) \quad \text{直線}\beta\text{の傾き} = \frac{k}{q_1q_2}$$

と表される。したがって、(4)式の η_D は(10)式と(11)式より常に

$$(12) \quad \eta_D = \frac{\text{直線}\beta\text{の傾き}}{\text{直線}\alpha\text{の傾きの絶対値}} = 1$$

である。(12)式は2点 A_1 と A_2 が直角双曲線(9)式の何処にあっても直線 α の傾きの絶対値と直線 β の傾きが常に等しくなるという幾何学的な事実をも明らかにしている。

5. 価格の弧弾力性と総収入の変化

本節で、価格の変化に基づく総収入の変化と価格の弧弾力性との関係を一般的な需要曲線の下で明らかにする。

価格が p_1 で需要量が q_1 であるときの総収入を TR_1 、価格が p_2 で需要量が q_2 であるときの総収入を TR_2 とすると、

$$(13) \quad TR_1 = p_1q_1, \quad TR_2 = p_2q_2$$

と表せる。最初に、需要曲線の該当する部分が非弾力的で、 $\eta_D < 1$ であるならば、(1)式より

$$(14) \quad \eta_D = \frac{(q_1 - q_2)(p_1 + p_2)}{(p_2 - p_1)(q_1 + q_2)} < 1$$

である。(2)式に注意すると、(14)式より

$$(q_1 - q_2)(p_1 + p_2) < (p_2 - p_1)(q_1 + q_2)$$

となり、この不等式を整理し、(13)式を用いると、

$$(15) \quad TR_1 = p_1 q_1 < p_2 q_2 = TR_2$$

をえる。したがって、(15)式より需要曲線が非弾力的であるところで価格が p_1 から p_2 に上昇すると、総収入は TR_1 から TR_2 に増加する(価格が下落するときには、総収入は減少する)。

同様に、需要曲線の該当する部分が弾力的で、 $\eta_D > 1$ であるならば、(1)式より

$$(16) \quad \eta_D = \frac{(q_1 - q_2)(p_1 + p_2)}{(p_2 - p_1)(q_1 + q_2)} > 1$$

が成立する。(2)式に注意すると、(16)式より

$$(q_1 - q_2)(p_1 + p_2) > (p_2 - p_1)(q_1 + q_2)$$

となり、この不等式を整理すると、

$$(17) \quad TR_1 = p_1 q_1 > p_2 q_2 = TR_2$$

をえる。ゆえに、(17)式は需要曲線が弾力的であるところで価格が p_1 から p_2 に上昇すると、総収入は TR_1 から TR_2 に減少する(価格が下落するときには、総収入は増加する)。

最後に、価格の弧弾力性 η_D が1に等しいときには、

$$(18) \quad \eta_D = \frac{(q_1 - q_2)(p_1 + p_2)}{(p_2 - p_1)(q_1 + q_2)} = 1$$

である。(18)式を整理し、(13)式を用いると、

$$(19) \quad TR_1 = p_1 q_1 = p_2 q_2 = TR_2$$

をえる。(19)式より $\eta_D = 1$ であるところで、価格が p_1 から p_2 に上昇しても、逆に p_2 から p_1 に下落しても総収入は変化しないことがわかる。この最後の場合のみ Baumol [3] (p. 177, n. 5) が明らかにした。

さらに、これらの逆、すなわち(15)式が成立するならば、(14)式が、(17)式が成立するならば、(16)式が、また(19)式が成立するならば、(18)式が成立することが言える。

6. 所得の弧弾力性と所得に占める財の支出額の変化

本節で、ある財に対する所得の弧弾力性を用いて所得の変化と所得に占めるその財の支出額の変化の関係を明らかにする。

ある消費者の所得を I とし、所得が I_1 であるときのある財の需要量を q_1 、所得が I_2 であるときの需要量を q_2 とし、この財の価格を一定の p とする。所得の弧弾力を η_I とすると、

$$(20) \quad \eta_I = \frac{(q_2 - q_1)}{\left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right)} \div \frac{(I_2 - I_1)}{\left(\frac{I_1 + I_2}{2}\right)}$$

と定義される。ここでは、簡単化のためにこの財は正常財であるとし、

$$(21) \quad I_1 < I_2, q_1 < q_2$$

であるとする。最初に、 $\eta_I > 1$ であるとき、(20)式と(21)式より

$$(22) \quad \eta_I = \frac{(q_2 - q_1)(I_1 + I_2)}{(I_2 - I_1)(q_1 + q_2)} > 1$$

である。(21)式に注意して(22)式を整理すると、

$$q_1/I_1 < q_2/I_2$$

となる。これより

$$(23) \quad pq_1/I_1 < pq_2/I_2$$

がえられる。したがって、(23)式より価格が不変で、 $\eta_I > 1$ であるとき、所得が増加すると、所得に占める当該財の支出額の割合は増加する。また、

$$(24) \quad \eta_I < 1$$

であるときは、

$$(25) \quad pq_1/I_1 > pq_2/I_2$$

をえる。最後に、

$$(26) \quad \eta_I = \frac{(q_2 - q_1)(I_1 + I_2)}{(I_2 - I_1)(q_1 + q_2)} = 1$$

であるときには、(26)式より

$$q_1/I_1 = q_2/I_2$$

となるから、これより

$$(27) \quad pq_1/I_1 = pq_2/I_2$$

をえる。(27)式より価格が不変で、 $\eta_I = 1$ であるとき、所得が変化しても当該財の支出額が所得に占める割合は一定のままである。

以上より、これらの逆、すなわち(23)式が成立するならば、(22)式が、(25)式が成立するならば、(24)式が、また(27)式が成立するならば、(26)式が成立することを証明できる。

参考文献

- [1] Allen, R. G. D., "The Concept of Arc Elasticity of Demand," *Review of Economic Studies*, Vol. 1 (1933), pp. 226-229.
- [2] Asimakopulos, A., *An Introduction to Economic Theory : Microeconomics*. Toronto : Oxford University Press, 1978.
- [3] Baumol, W. J., *Economic Theory and Operations Analysis*. Second Ed., Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall, 1965.
- [4] Ferguson, C. E., and S. C. Maurice, *Economic Analysis*. Revised Ed., Homewood, Illinois : Richard D. Irwin, 1974.
- [5] Friedman, M., *Price Theory*. Chicago, Illinois : Aldine Publishing Co., 1976.
- [6] Gill, R. T., *Economics and the Private Interest : An Introduction to Economics*. Second Ed., Pacific Palisades, California : Goodyear Publishing Co., 1976.
- [7] Holt, C. C., and P. A. Samuelson, "The Graphic Depiction of Elasticity of Demand," *Journal of Political Economy*, Vol. 54 (1946), pp. 354-357. Stiglitz J. E. (ed.) *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*. Vol. I, Cambridge, Mass. : The MIT Press, 1966, pp. 57-60.
- [8] Keynes, J. M., "Alfred Marshall, 1842-1924," *Economic Journal*, Vol. 34 (1924), pp. 311-372. Pigou, A. C. (ed.), *Memorials of Alfred Marshall*. London : Macmillan, 1925 ; New York : A. M. Kelley, 1966, pp. 1-65.
- [9] Lerner, A. P., "The Diagrammatical Representation of Elasticity of Demand," *Review of Economic Studies*, Vol. 1 (1933), pp. 39-44. Lerner, A. P., *Essays in Economic Analysis*. London : Macmillan, 1953, pp. 137-146.

- [10] Mansfield, E., *Microeconomics : Theory and Applications*. Third Ed., New York : W. W. Norton, 1979.
- [11] Marshall, A., "The Graphic Method of Statistics," in the Jubilee Volume of the *Journal of the Royal Statistical Society*, 1885, pp. 251-260. Pigou, A. C. (ed.), *Memorials of Alfred Marshall*. London : Macmillan, 1925 ; New York : A. M. Kelley, 1966, pp. 175-187.
- [12] Marshall, A., *Principles of Economics*. Eighth Ed., London : Macmillan, 1920.
- [13] Newman, P., "Elasticity," in Eatwell, J., M. Milgate, and P. Newman (eds.), *The New Palgrave : A Dictionary of Economics*. Vol. 2, London and Tokyo : Macmillan and Maruzen, 1987, pp. 125-127.
- [14] Samuelson, P. A., and W. D. Nordhaus, *Economics*. Thirteenth Ed., New York : McGraw-Hill Book Co., 1989.
- [15] Stigler, G. J., *The Theory of Price*. Third Ed., New York : Macmillan, 1966.
- [16] Stiglitz, J. E., *Economics*. New York : W. W. Norton, 1993.
- [17] Varian, H. R., *Intermediate Microeconomics : A Modern Approach*. Third Ed., New York : W. W. Norton, 1993.