Chebyshev基準による回帰直線の特徴づけ定理の別の証明

尾　崎　雄一郎

1. はじめに

偏差の絶対値の最大値を最小にするChebyshev基準を用いて1変数の回帰曲線を求める問題がKelley［4］によって，また幾つかの独立変数による回帰超平面を偏差の絶対値の和を最小にする最小絶対値法やChebyshev基準を用いて求める問題がWagner［10］によってリニアー・プログラミングの問題に変換できることが示された．Dolby［2］は1つの平面の観測値を別の平面の直線に対応させることによって，Chebyshev基準による回帰直線を求める問題を過剰決定の連立方程式の近似解を求める問題に変換してその近似解すなわち元の問題の回帰直線の傾きと切片を求める図を利用した方法を提案した．Appa and Smith［1］は最小絶対値法やChebyshev基準による回帰超平面がもつ若干の特徴を明らかにし，Farebrother［3］は最小絶対値法やChebyshev基準を歴史的に考察するとともに，Chebyshev基準による回帰直線を間接的ではあるが図を用いて求める方法を示した．尾崎［5］はChebyshev基準による回帰直線の傾きを決定する要因など多くの特徴を明らかにし，尾崎［7］はChebyshev基準による回帰直線を図を用いて直接求める簡単で，効率的な方法を提案した．また，尾崎［6］は原点を通るChebyshev基準による回帰直線を一般的に示す式とその直線の若干の特徴を明らかにし，尾崎［8］は原点を通るChebyshev基準による回帰直線の傾きを決定する必要十分条件などを見出した．さらに，尾崎［9］はChebyshev基準による2次の回帰曲線の一意性や2次の係数の符号を決定する条件などを明らかにした．

本論文の目的は，Chebyshev基準による回帰直線を求める問題を過剰決定の連立方程式の近似解を求める問題に変換してその近似解を図を利用して求めるDolby［2］の方法を一層効率的にすることと，この図による方法を用いて尾崎［5］におけるChebyshev基準による回帰直線を特徴づける幾つかの定理に別の証明を与えることにある．

2. 点と直線の双対的対応

本節において x-y 平面上の点と直線を各々別の平面上の直線と点に対応させ，別の平面上の直線と点を各々 x-y 平面上の点と直線に対応させる方法を説明する（Dolby［2］を参照）．

最初に，x-y 平面上の点

(1)　(x_0, y_0)

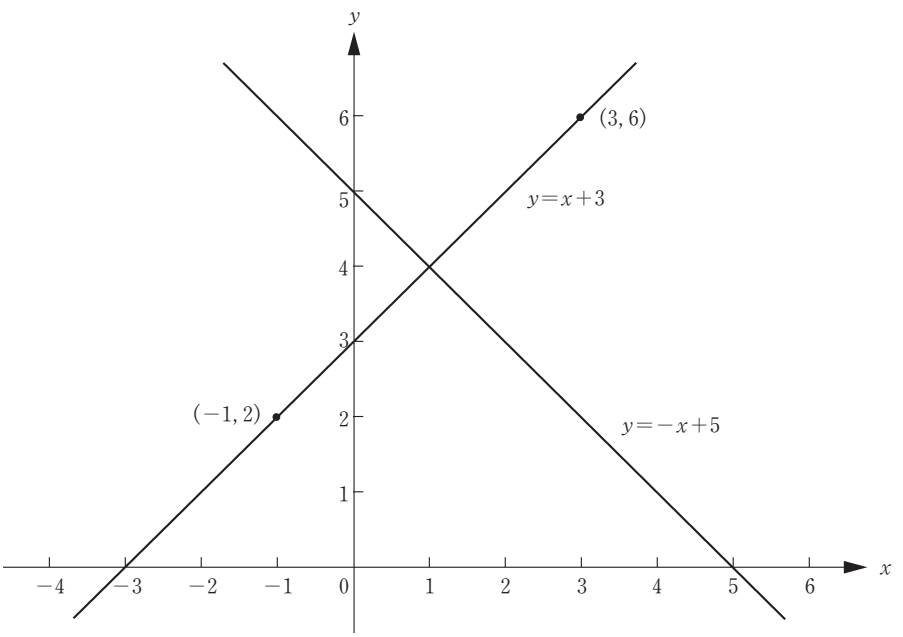
を考える．点(1)を通る直線は $y_0 = ax_0 + b$ と表せ，これより

(2)　$b = -(x_0)a + y_0$

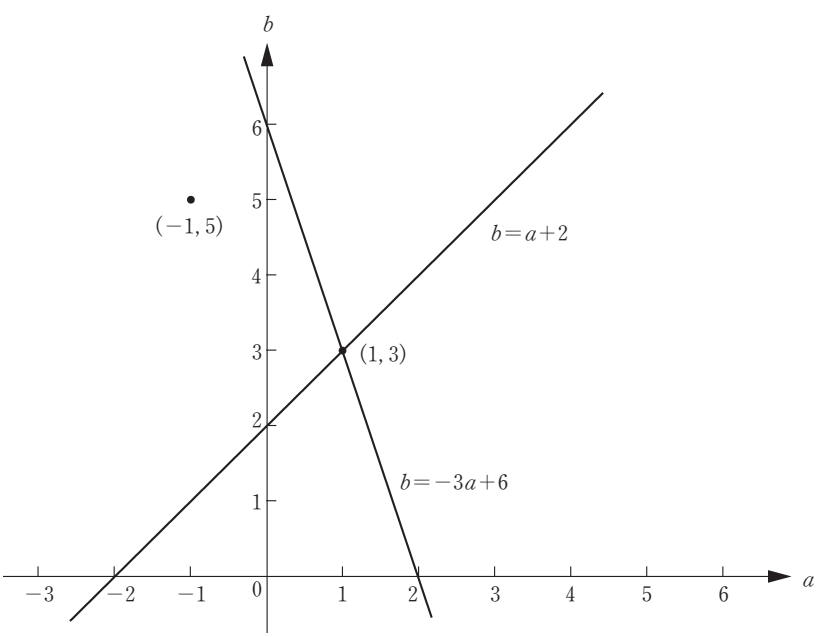
となる．(2)は別の平面――これを a-b 平面と呼ぶことにする――における傾きが $-x_0$ で，b 軸の切片が y_0 である直線とみなすことができる．これより x-y 平面上の点(1)を a-b 平面上の直線(2)に対

応させ，逆に a-b 平面上の直線(2)を x-y 平面上の点(1)に対応させる．次に，x-y 平面上の傾きが a_0 で，y 軸の切片が b_0 である直線

(3)　　$y=a_0x+b_0$



第 1 図



第 2 図

を考える．直線(3)は $b_0=(-x)a_0+y$ と表せ，これは a-b 平面上の点

(4)　(a_0, b_0)

を通る直線である．このことより x-y 平面上の直線(3)を a-b 平面上の点(4)に対応させ，逆に a-b 平面上の点(4)を x-y 平面上の直線(3)に対応させる．

例えば，第1図に示される x-y 平面上の点 $(-1, 2)$ を第2図の a-b 平面上の直線 $b=a+2$ に，点 $(3, 6)$ を直線 $b=-3a+6$ に対応させ，また第1図の x-y 平面上の直線 $y=x+3$ を第2図の a-b 平面上の点 $(1, 3)$ に，直線 $y=-x+5$ を点 $(-1, 5)$ に対応させ，これらの逆も成立するものとする．

3．回帰直線を求める問題から過剰決定の連立方程式の近似解を求める問題への変換

本節において x-y 平面上の観測値を a-b 平面上の直線に変換し，Chebyshev 基準による回帰直線を求める問題を過剰決定の連立方程式の近似解を求める問題に変換する．

独立変数 x と従属変数yに関する m 個の観測値を

(5)　$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_m, y_m)$

とし，$m \geqq 3$ であり，これらの観測値のすべてが同一の直線上に並んでいることはないものとする．(5)の観測値に対する回帰直線を

(6)　$y=ax+b$

とし，(5)の i 番目の観測値と(6)の回帰直線との偏差 e_i を

(7)　$e_i=y_i-(ax_i+b) \qquad (i=1, \cdots, m)$

と定めると，Chebyshev 基準による回帰直線(6)の係数 a と b は，$\max|e_i|$ を最小にすることによって求められる．

(5)の x-y 平面上のm個の観測値を前節の方法で a-b 平面上の直線に変換すると，

(8)　$b=-x_ia+y_i \qquad (i=1, \cdots, m)$

となり，これは b の係数がすべて1であるという特殊な過剰決定の連立方程式である．(8)の i 番目の方程式に対する誤差 d_i を

(9)　$d_i=y_i-(ax_i+b) \qquad (i=1, \cdots, m)$

とすると，(7)と(9)よりすべての i について $e_i=d_i$ である．(8)に対する Chebyshev 基準による近似解は $\max|d_i|$ を最小にすることによって求められる．いま，

(10)　$z=\max\limits_{i=1, \cdots, m}|d_i|$

とすると，(9)と(10)より

(11)　$z \geqq |d_i|=|y_i-ax_i-b| \geqq 0 \qquad (i=1, \cdots, m)$

が成立する．したがって，(10)を最小にする問題は，(11)より

(12)　z

を次の制約条件の下で最小にする

(13)　$ax_i+b+z \geqq y_i, \quad -ax_i-b+z \geqq -y_i \qquad (i=1, \cdots, m), \quad z \geqq 0$

というリニアー・プログラミングの問題になる．ここで，a, b, z が変数で a と b には符号の制約がなく，x_i と y_i はすべて(5)に基づく定数である．

主問題(12)-(13)に対する双対問題は，

$$\sum_{i=1}^{m} y_i (u_i - v_i) \tag{14}$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} x_i (u_i - v_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{m} (u_i - v_i) = 0 \\ &\sum_{i=1}^{m} (u_i + v_i) \leqq 1, \quad u_i \geqq 0, v_i \geqq 0 \qquad (i = 1, \cdots, m) \end{aligned} \tag{15}$$

となる．主問題(12)-(13)と双対問題(14)-(15)に最適解が存在し(尾崎［5］，定理1)，主問題の最適解を$\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{z}$, 双対問題の最適解を $\tilde{u}_i$, $\tilde{v}_i$ $(i=1, \cdots, m)$ とすると，観測値(5)が一直線上に並んでいない，すなわち直線(8)が過剰決定であるという仮定より，$\tilde{z} > 0$ である(尾崎［5］，定理2)．

4．Dolby の図による解法

本節で，回帰直線を求める問題を過剰決定の連立方程式の近似解を求める問題に変換し，図を利用して Chebyshev 基準による近似解をえる Dolby［2］の方法を説明する．

(8)の m 個の直線を a-b 平面に描き，これらの中で最も上方に位置する直線の部分をaのすべての値に対して求めてそれらを連結した上部包絡線を $p(a)$，最も下方に位置する直線の部分をaのすべての値に対して求めてそれらを連結した下部包絡線を $q(a)$，これらの差を $r(a)$ とする，すなわち

$$p(a) = \max_{i=1,\cdots,m} (-ax_i + y_i), \quad q(a) = \min_{i=1,\cdots,m} (-ax_i + y_i), \quad r(a) = p(a) - q(a) \tag{16}$$

とする．(8)の i 番目の直線と点 (a_0, b_0) との誤差の絶対値は，$|d_i| = |y_i - a_0 x_i - b_0|$ であるから，$|d_i|$ は点 (a_0, b_0) と i 番目の直線上の点 $(a_0, -a_0 x_i + y_i)$ との距離に等しい．したがって，Chebyshev 基準による近似解を求めるにはこれら2つの包絡線の上下間の距離 $r(a)$ が最小になる a の値が最適な$\tilde{a}$であり，この $\tilde{a}$ のところでの上下2つの包絡線上の点の中点が最適な $\tilde{b}$ を与え，$\tilde{z} = r(\tilde{a})/2$ である．以上より，このような $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{z}$ を図を利用して求めればよい(次節の第3図を参照)．

5．Dolby の方法の改良

次の2つの事実を利用することによって前節の Dolby の方法を一層効率的にすることができる．簡単化のために

$$x_i \neq x_j \quad (i, j = 1, \cdots, m\,;\, i \neq j) \tag{17}$$

が成立する場合について説明する．双対問題(14)-(15)の最適解は2つの $\tilde{u}_i$ とこれらと異なる番号の1つの $\tilde{v}_i$ が正であるか，あるいは2つの $\tilde{v}_i$ とこれらと異なる番号の1つの $\tilde{u}_i$ が正であり，いずれの場合でも他の $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ はすべてゼロである(尾崎［5］，定理4)から，簡単化のために(i)$\tilde{u}_1 > 0$, $\tilde{v}_2 > 0$, $\tilde{u}_3 > 0$ であるか，(ii)$\tilde{v}_1 > 0$, $\tilde{u}_2 > 0$, $\tilde{v}_3 > 0$ であるとしても一般性は失われない．(i)の場合，相補弛緩定理によって主問題の制約条件(13)の3つの対応する式は等号で，その他の式はすべて弱い不等号で成立するから，

(18)
$$-\tilde{a}x_1+y_1=\tilde{b}+\tilde{z},\quad -\tilde{a}x_2+y_2=\tilde{b}-\tilde{z},\quad -\tilde{a}x_3+y_3=\tilde{b}+\tilde{z}$$
$$-\tilde{a}x_i+y_i\leqq\tilde{b}+\tilde{z}\quad (i=2,4,\cdots,m),\quad -\tilde{a}x_i+y_i\geqq\tilde{b}-\tilde{z}\quad (i=1,3,\cdots,m)$$

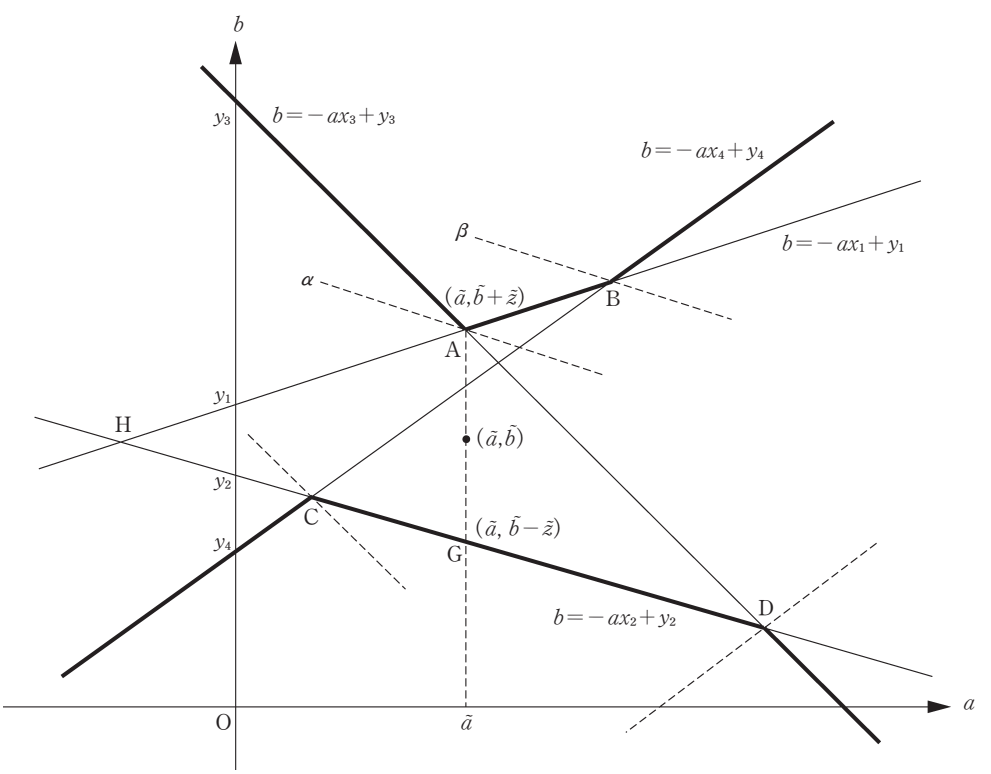
となる．(17)に注意すると，第3図におけるように直線 $b=-ax_1+y_1$ と $b=-ax_3+y_3$ は必ず交わる．この交点をAとすると，交点Aの座標は(18)の1番目の式より $(\tilde{a},-\tilde{a}x_1+y_1)$ と表せ，またこれは $(\tilde{a},\tilde{b}+\tilde{z})$ と表せる．交点Aと同じ a 座標をもつ直線 $b=-ax_2+y_2$ 上の点Gの座標は $(\tilde{a},-\tilde{a}x_2+y_2)$ であり，これは(18)の2番目の式より $(\tilde{a},\tilde{b}-\tilde{z})$ と表せる．(8)の他の直線は(18)の4番目と5番目の不等式より必ず2点AとGの間を通る．したがって，最適解を図を用いて求めるには a-b 平面の2直線の交点の中から，他のすべての直線がこの交点の下方にあるか，あるいは上方にあるものだけを取り上げて検討すればよい．第3図の場合，最適解を与える可能性のある2直線の交点は点A, B, C, Dの4つだけである(たとえば，$b=-ax_1+y_1$ と $b=-ax_2+y_2$ の交点Hは，これより上方にも，下方にも別の直線が通っているので，この交点が最適解を与えることはない)．

次に，$\tilde{z}>0$ に注意すると，相補弛緩定理によって双対問題の制約条件(15)の3番目の不等式が最適解に対して等号で成立するから，(15)より

$$x_1\tilde{u}_1-x_2\tilde{v}_2+x_3\tilde{u}_3=0,\quad \tilde{u}_1-\tilde{v}_2+\tilde{u}_3=0$$
$$\tilde{u}_1+\tilde{v}_2+\tilde{u}_3=1,\qquad \tilde{u}_1>0,\ \tilde{v}_2>0,\ \tilde{u}_3>0$$

が成立する．これらより

(19)
$$(2\tilde{u}_1)x_1+(2\tilde{u}_3)x_3=x_2,\quad 2\tilde{u}_1+2\tilde{u}_3=1,\quad \tilde{u}_1>0,\ \tilde{u}_3>0$$



第3図

をえる．(17)に注意すると，(19)より

(20)　　$x_1<x_2<x_3$　あるいは　$x_3<x_2<x_1$

が成立しなければならない．(20)は次のことを意味する．第3図の場合，2直線の交点Aから最も離れている直線 $b=-ax_2+y_2$ と同じ傾き $-x_2$ をもち交点Aを通る直線 a が，交点Aを決定している2直線 $b=-ax_1+y_1$ と $b=-ax_3+y_3$ との間を通るとき，すなわち $-x_1>-x_2>-x_3$ であるとき，交点Aが最適解を導く．2直線の交点Bの真下にあってそこから最も離れている直線 $b=-ax_2+y_2$ と平行で，点Bを通る直線 β は点Bを決定している2直線の間を通っていないから，交点Bは最適解を導くものではない(同様に，交点CやDを通り，最も遠い直線と平行な，点線で示された直線も，これらの交点を決定している2直線の間にはないから，交点CやDも最適解を導くものではない)．

(ii)の場合，2直線 $b=-ax_1+y_1$ と $b=-ax_3+y_3$ の交点Aの座標は $(\tilde{a},\ \tilde{b}-\tilde{z})$ と表せ，交点Aの真上にあってこれと同じ a 座標をもつ直線 $b=-ax_2+y_2$ 上の点Gの座標が $(\tilde{a},\ \tilde{b}+\tilde{z})$ と表せること以外は，(i)の場合と同様で，やはり(20)をえる．

6．回帰直線の特徴づけ定理の別の証明

尾崎［5］における Chebyshev 基準による回帰直線の特徴づけ定理の幾つかに対して本節で異なった証明を与える．

最初に，次の補助定理を証明する．

補助定理． 所与の $x_i, y_i\ (i=1, \cdots, m)$ に対して(16)で定義した $r(a)$ は凸関数である．

証明． 最初に，$p(a)$ が凸関数であることを証明する．任意の a' と a'' $(a'\neq a'')$ に対して(16)より

$$p(a')=\max_i\ (-a'x_i+y_i),\quad p(a'')=\max_i\ (-a''x_i+y_i)$$

であるから，$0\leqq\theta\leqq1$ である θ に対して

$$\begin{aligned}p\{\theta a'+(1-\theta)a''\}&=\max_i\ [-\{\theta a'+(1-\theta)a''\}x_i+y_i]\\&=\max_i\ \{\theta(-a'x_i+y_i)+(1-\theta)(-a''x_i+y_i)\}\\&\leqq\theta\max_i\ (-a'x_i+y_i)+(1-\theta)\max_i\ (-a''x_i+y_i)\\&=\theta p(a')+(1-\theta)p(a'')\end{aligned}$$

である．よって，$p(a)$ は凸関数である．次に，$q(a)$ が凹関数であることを証明する．

$$q(a')=\min_i\ (-a'x_i+y_i),\quad q(a'')=\min_i\ (-a''x_i+y_i)$$

であるから，$0\leqq\theta\leqq1$ である θ に対して

$$\begin{aligned}q\{\theta a'+(1-\theta)a''\}&=\min_i\ [-\{\theta a'+(1-\theta)a''\}x_i+y_i]\\&=\min_i\ \{\theta(-a'x_i+y_i)+(1-\theta)(-a''x_i+y_i)\}\\&\geqq\theta\min_i\ (-a'x_i+y_i)+(1-\theta)\min_i\ (-a''x_i+y_i)\\&=\theta q(a')+(1-\theta)q(a'')\end{aligned}$$

である．ゆえに $q(a)$ は凹関数である．これより $-q(a)$ は凸関数である．したがって，$r(a)=$

$p(a)-q(a)$ は凸関数である．　Q. E. D.

定理 1（尾崎［5］，定理 5 と定理 6）．主問題(12)-(13)の最適解が多重解であるならば，x 座標が等しい観測値が存在する．また，(17)が成立するならば，主問題の最適解は一意である．

証明．最初に，主問題(12)-(13)の最適解が多重解で，$\tilde{a}$ と十分に小さい $\delta(\delta\neq 0)$ に対して $\tilde{a}+\delta$ が最適解であると仮定する．これより $r(\tilde{a})=r(\tilde{a}+\delta)$であるから，$\tilde{a}$ と $\tilde{a}+\delta$ の間で $r(a)$ は一定であり，$p(a)$ と $q(a)$ のグラフは平行でなければならない．このことより 2 つの異なった直線の番号，たとえば c と d に対して

$$p(\tilde{a})=-\tilde{a}x_c+y_c, \qquad q(\tilde{a})=-\tilde{a}x_d+y_d$$
$$p(\tilde{a}+\delta)=-(\tilde{a}+\delta)x_c+y_c, \quad q(\tilde{a}+\delta)=-(\tilde{a}+\delta)x_d+y_d$$

が成立しなければならない．これらと(16)より

$$r(\tilde{a})=-\tilde{a}(x_c-x_d)+y_c-y_d$$
$$r(\tilde{a}+\delta)=-(\tilde{a}+\delta)(x_c-x_d)+y_c-y_d$$

となる．ここで，$r(\tilde{a})=r(\tilde{a}+\delta),\ \delta\neq 0$ であるから，

$$x_c=x_d$$

がえられる．したがって，主問題の最適解が多重解であるならば，x 座標の等しい観測値が存在する．

次に，この定理の最初の命題の対偶を考えると，$x_c\neq x_d$ が成立するならば，最適解は一意である．ただし，c は $p(a)$ を，d は $q(a)$ を形成する直線の番号である．このとき，(17)が成立するならば，$x_c\neq x_d$ が任意の直線の番号について成立するから，したがってこの場合最適解は一意である．

Q. E. D.

(5)の m 個の観測値の中で y_i が最小である番号の集合をM_1，y_i が最大である番号の集合をM_2，これら以外の番号の集合をM_3，すなわち

(21)　$$M_1=\{i\,|\min\ y_i\},\ M_2=\{i\,|\max\ y_i\},\ M_3=\{i\,|\,i\notin M_1,\ i\notin M_2\}$$

とする．さらに，$M_1(\neq\phi)$に属する番号に対応する観測値の中で x 座標が最小であるものの番号を g，最大であるものの番号を h，すなわち

(22)　$$x_g<\cdots<x_h \quad (g,\ h\in M_1)$$

とする．また，$M_2(\neq\phi)$ に属する番号に対応する観測値の中で x 座標が最小であるものの番号をk，最大であるものの番号をn，すなわち

(23)　$$x_k<\cdots<x_n \quad (k,\ n\in M_2)$$

とする．なお，M_1 が唯一つの番号から成り立つときには $g=h$, M_2 が唯一つの番号から成り立つときには $k=n$ であり，$M_3=\phi$ であることもある．

定理 2（尾崎［5］，定理 12）．(22)と(23)で定義された観測値の番号 h と k に対して

(24)　$$x_h<x_k \quad (h\in M_1,\ k\in M_2)$$

が成立するならば，主問題(12)-(13)の最適解において

(25)　$$\tilde{a}>0$$

であり，また(22)と(23)で定義された観測値の番号 g と n に対して

(26)　　$x_g > x_n \quad (g \in M_1,\ n \in M_2)$

が成立するならば，

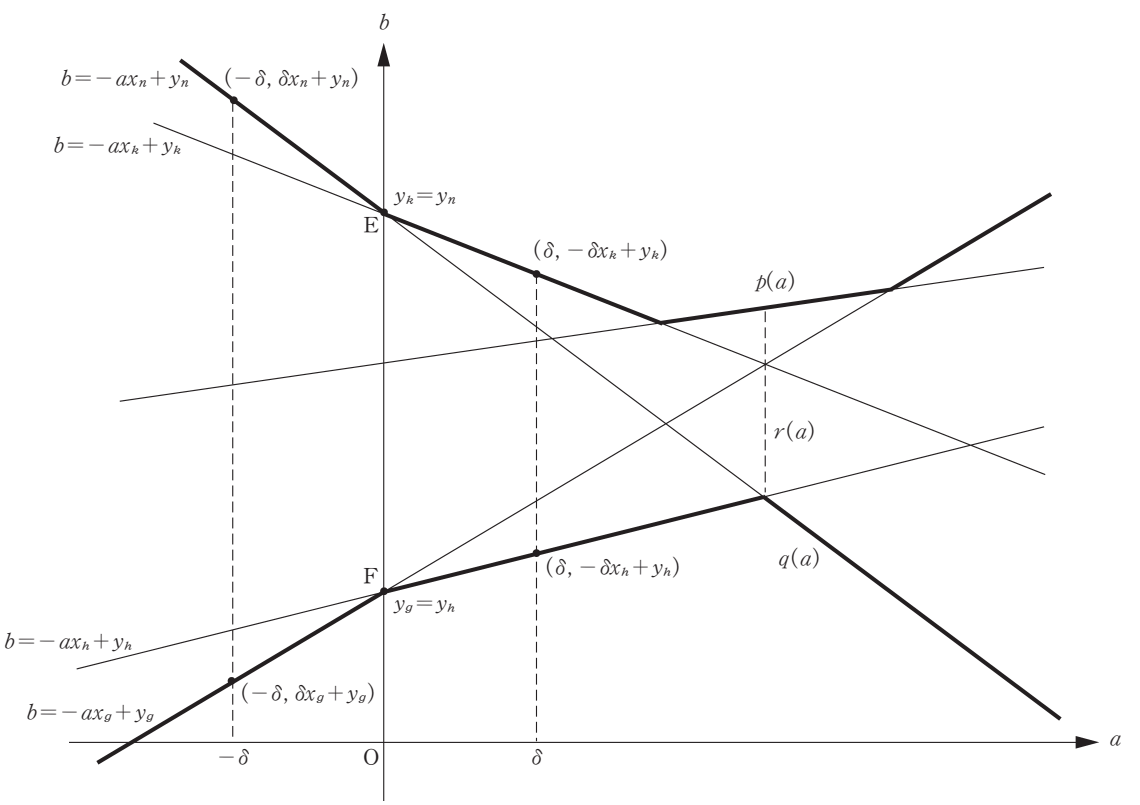
(27)　　$\tilde{a} < 0$

である．

証明．(24)が成立すると仮定する．このとき，x-y 平面上の観測値(5)を変換した a-b 平面上の直線(8)と b 軸との交点 y_i が最大である点をE，y_i が最小である点をFとする．点Fを通る直線の番号は M_1 によって与えられ，M_1 の中で直線の傾きが最小である番号は，(22)より $-x_g > \cdots > -x_h$ であるから，h であり，傾きが最大であるものの番号は g である．同様に，点Eを通る直線の番号は M_2 によって与えられ，M_2 の中で直線の傾きが最小であるものの番号は，(23)より $-x_k > \cdots > -x_n$ であるから，n であり，最大であるものの番号は k である．十分小さい正数 δ に対して $a=\delta$ と定める．この値に対して直線(8)の中で最大の b の値を与えるのは点Eを通って傾きが最大である直線 $b=-ax_k+y_k$ であり，このときの b の値は(16)を用いて $p(\delta)=-\delta x_k+y_k$ と表せる．また，$a=\delta$ に対して(8)の中で最小のbの値を与えるのは点Fを通って傾きが最小の直線 $b=-ax_h+y_h$ で，このときのbの値は(16)を用いて $q(\delta)=-\delta x_h+y_h$ と表せる(第4図を参照)．これらと(16)，(24)，$\delta>0$ より

(28)　　$r(\delta)=-\delta(x_k-x_h)+y_k-y_h<y_k-y_h=r(0)$

をえる．同様に，十分小さい正数 δ に対して $a=-\delta$ と定めると，点Eを通って傾きが最小である直



第4図

線 $b=-ax_n+y_n$ より $p(-\delta)=\delta x_n+y_n$ であり，点Fを通って傾きが最大である直線 $b=-ax_g+y_g$ より $q(-\delta)=\delta x_g+y_g$ である．これらと(16)，(22)，(23)，(24)，$\delta>0$ より

(29)　$$r(-\delta)=\delta(x_n-x_g)+y_n-y_g>y_n-y_g=r(0)$$

をえる．したがって，(28)と(29)より

(30)　$$r(-\delta)>r(0)>r(\delta)$$

という関係がえられる．補助定理に注意すると，(30)より $r(a)$ の最小値，したがって z の最小値は正である a によって与えられ，これより(25)がえられる．

同様に，(26)が成立するならば，(27)がえられる．　Q. E. D.

定理 3（尾崎［5］，定理 13）．(22)と(23)で定義された 3 個の観測値 $(x_g, y_g), (x_k, y_k), (x_n, y_n)$ が存在して

(31)　$$x_k<x_g<x_n \quad (g\in M_1,\ k,\ n\in M_2)$$

が成立するか，あるいは 3 個の観測値 $(x_g, y_g), (x_h, y_h), (x_k, y_k)$ が存在して

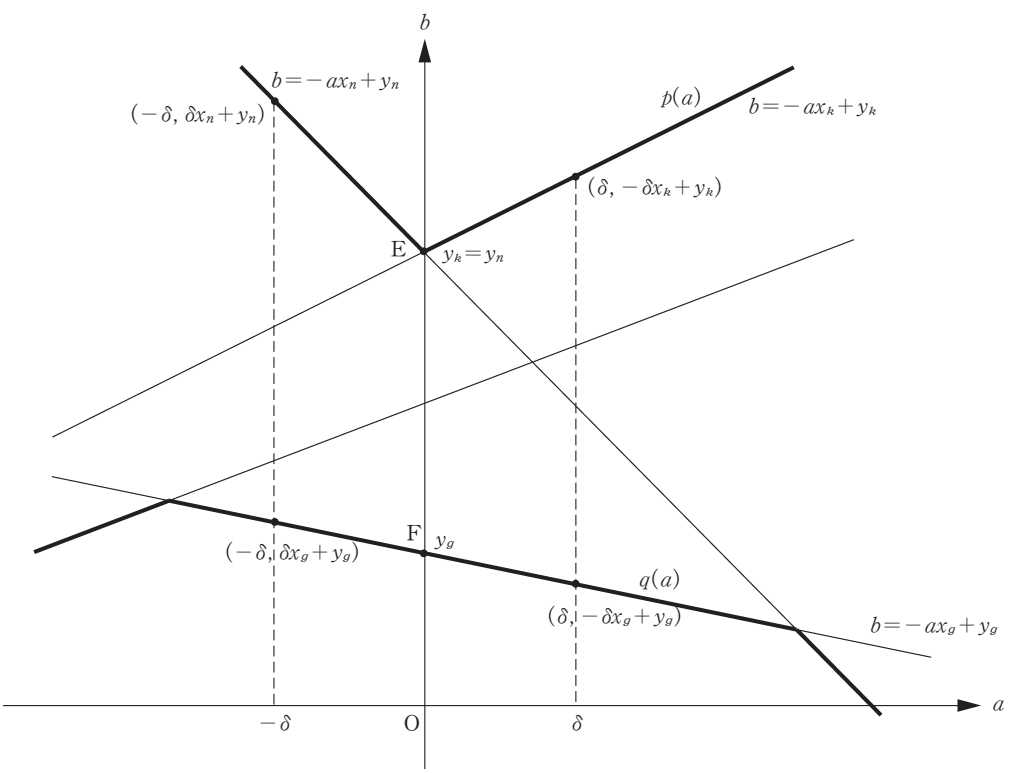
(32)　$$x_g<x_k<x_h \quad (g,\ h\in M_1,\ k\in M_2)$$

が成立するならば，

(33)　$$\tilde{a}=0$$

である．

証明．(31)が成立すると仮定する．直線(8)と b 軸との交点 y_i が最大である点をE，最小である点を



第 5 図

Fとする．十分に小さい正数 δ に対して $a=\delta$ とすると，この値に対して直線(8)の中で最大の b の値を与えるのは，点Eを通って傾きが最大である直線 $b=-ax_k+y_k$ で，このときの b の値は(16)より $p(\delta)=-\delta x_k+y_k$ である．また，$a=\delta$ に対して点Fを通る直線 $b=-ax_g+y_g$ 上の b の値は $-\delta x_g+y_g$ である(第5図参照)．なお，点Fを通って傾きがもっとも小さい別の直線 $b=-ax_h+y_h$ が存在する場合には $-\delta x_g+y_g$ は最小ではなく，$q(\delta)\leqq-\delta x_g+y_g$ が成立する．ゆえに，(31)と $\delta>0$ より

(34)　$$r(\delta)\geqq-\delta(x_k-x_g)+y_k-y_g>y_k-y_g=r(0)$$

が成立する．同様に，$a=-\delta$ とするとき，この値に対して直線(8)の中で最大の b の値を与えるのは，点Eを通り傾きが最小の直線 $b=-ax_n+y_n$ で，その最大値は $p(-\delta)=\delta x_n+y_n$ であり，(8)の中で $a=-\delta$ に対して最小の b の値を与えるのは，点Fを通って傾きが最大である直線 $b=-ax_g+y_g$ で，その最小値は $q(-\delta)=\delta x_g+y_g$ である．ゆえに，(31)と $\delta>0$ より

(35)　$$r(-\delta)=\delta(x_n-x_g)+y_n-y_g>y_n-y_g=r(0)$$

が成立する．(34)と(35)より

(36)　$$r(-\delta)>r(0),\quad r(\delta)>r(0)$$

という関係をえる．補助定理に注意すると，(36)より $r(a)$ は $a=0$ のところで最小になる，すなわち(33)をえる．

(32)が成立する場合も同様に証明できる．　Q. E. D.

定理 4（尾崎［5］，定理 15)．(21)で定義した M_1 と M_2 の各々が唯一つの番号 g と k からだけ成り立ち，

(37)　$$x_g=x_k\quad(g\in M_1,\ k\in M_2)$$

であるならば，

(38)　$$\tilde{a}\gtrdot 0$$

のすべてが成立する．

証明. 仮定により直線(8)と b 軸との交点 y_i が最小であるのは直線 $b=-ax_g+y_g$ 唯一つであり，y_i が最大であるのは直線 $b=-ax_k+y_k$ 唯一つである．(37)よりこれら2つの直線は平行である(第6図を参照)．十分小さい正数 δ に対して $a=\delta$ と定めると，(16)より $p(\delta)=-\delta x_k+y_k$, $q(\delta)=-\delta x_g+y_g$ であるから，(16)と(37)より

(39)　$$r(\delta)=-\delta(x_k-x_g)+y_k-y_g=y_k-y_g=r(0)$$

となる．同様に，$a=-\delta$ に対して $p(-\delta)=\delta x_k+y_k$, $q(-\delta)=\delta x_g+y_g$ であるから，(16)と(37)より

(40)　$$r(-\delta)=\delta(x_k-x_g)+y_k-y_g=y_k-y_g=r(0)$$

となる．(39)と(40)より

(41)　$$r(-\delta)=r(0)=r(\delta)$$

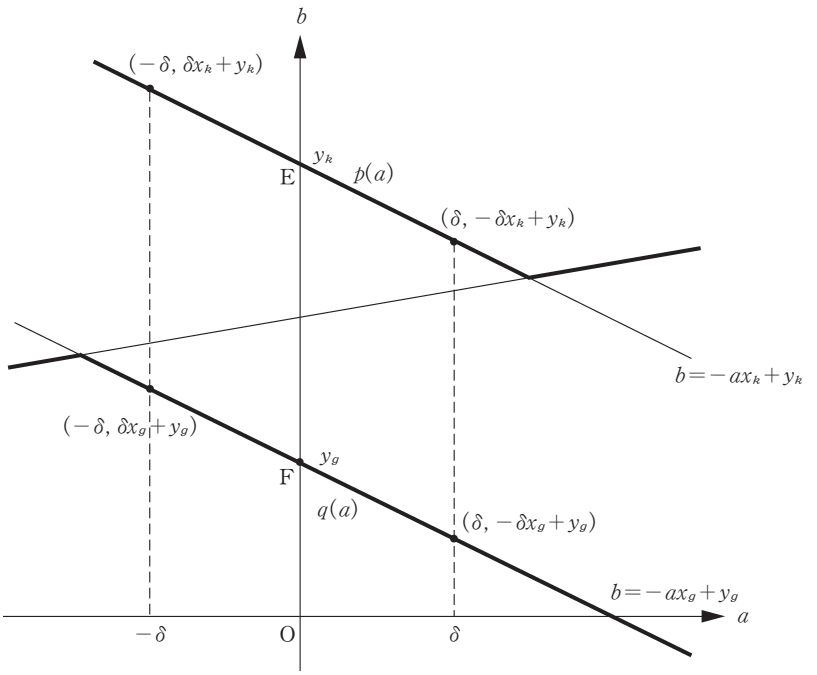
という関係をえる．

以下において(41)が $r(a)$ の最小値であることを背理法を用いて証明する．結論と異なって

(42)　$$r(0)>r(a')$$

となる a' が存在すると仮定する．最初，$a'>\delta$ であるとする．このとき，θ を $\theta=\delta/a'$ と定めると，$\delta>0$ より $0<\theta<1$ であり，a' と0との凸結合 $\theta a'+(1-\theta)0$ は $\theta a'$ であり，これは δ に等しいから，

$$r\{\theta a'+(1-\theta)0\}=r(\theta a')=r(\delta)$$



第 6 図

であり，(41)，(42)と $\theta>0$ に注意すると，

(43)　$$r\{\theta a'+(1-\theta)0\}-\{\theta r(a')+(1-\theta)r(0)\}=\theta\{r(0)-r(a')\}>0$$

となる．(43)より $0<\theta<1$ である θ に対して

(44)　$$r\{\theta a'+(1-\theta)0\}>\theta r(a')+(1-\theta)r(0)$$

が成立する．しかし，(44)は $r(a)$ が凸関数であるという補助定理に矛盾する．次に，$a'<-\delta$ であるとする．このとき，$\theta=-\delta/a'$ と定めると，$\delta>0$ より $0<\theta<1$ であり，a' と 0 との凸結合 $\theta a'+(1-\theta)0$ は $-\delta$ に等しく，(41)，(42)と $\theta>0$ を考慮すると，やはり(43)をえ，これより(44)が成立し，補助定理に矛盾する．以上より(42)が成立するような a' は存在せず，(41)が $r(a)$ の最小値である．(41)より(38)の結論をえる．　Q. E. D.

7．数　値　例

本節で x-y 平面上の観測値を a-b 平面上の直線に対応させて Chebyshev 基準による回帰直線を過剰決定の連立方程式の近似解として求める問題を数値例で考察する．

例題 1．(17)を満たす観測値を 1 番目から 5 番目まで順に

$$(-1,-1),\ (1,-1),\ (2,6),\ (3,1),\ (4,6)$$

とする．このとき，y 座標の値が最小であるのは 1 番目と 2 番目の観測値であるから，(21)より $M_1=\{1,2\}$ であり，$x_1=-1, x_2=1$ であるから，(22)より $g=1, h=2$ である．また，y 座標が最大であるの

は，3番目と5番目の観測値であるから，$M_2=\{3,5\}$ であり，$x_3=2, x_5=4$ であるから，(23)より $k=3, n=5$ である．尾崎［**7**］の図を用いる方法で Chebyshev 基準による回帰直線を求めると，第7図におけるように，

$$y=x+1$$

となる．

他方，5個の観測値を第2節の方法で a-b 平面上の直線に変換すると，

$$b=a-1,\ b=-a-1,\ b=-2a+6,\ b=-3a+1,\ b=-4a+6$$

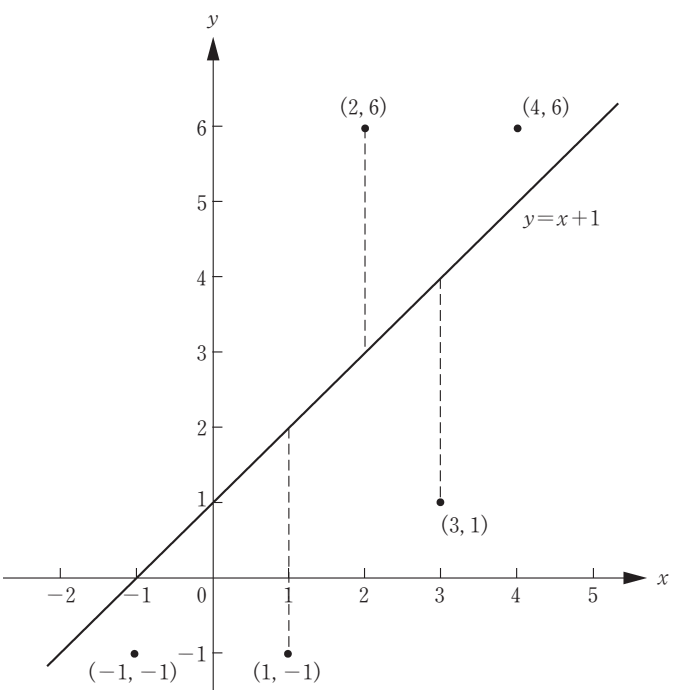
となる．これらより(16)で定義した上部包絡線 $p(a)$ と下部包絡線 $q(a)$ は第8図の太線のようになる．これらに基づいて $r(a)$ が最小になる主問題の最適解 $\tilde{a}, \tilde{b}$ と目的関数(12)の最小値は，第8図より

$$\tilde{a}=1,\ \tilde{b}=1,\ \tilde{z}=3$$

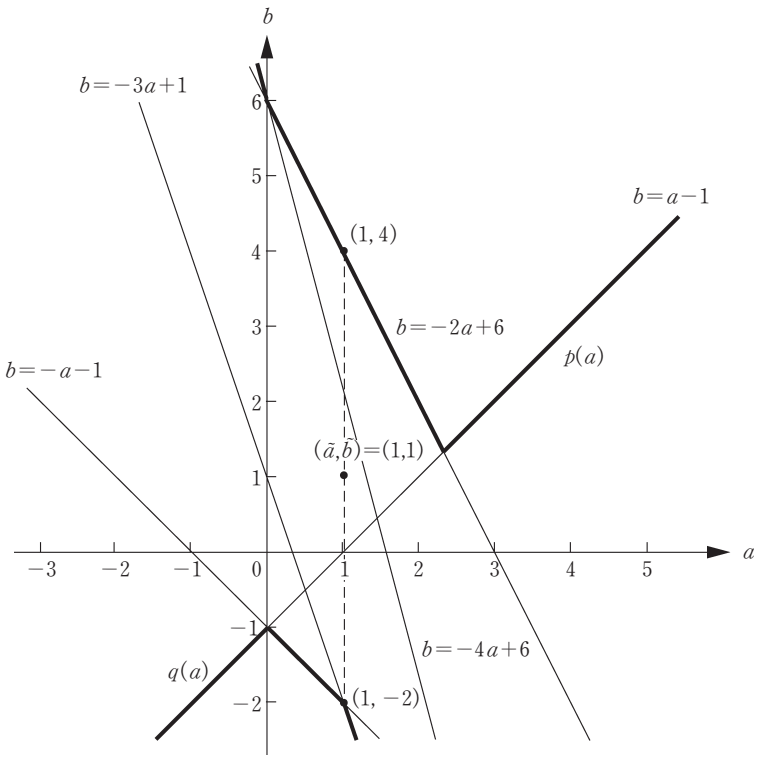
である．この場合，(17)が成立するので，定理1より主問題の最適解は一意であり，

$$x_h=x_2=1<2=x_3=x_k$$

であるから，定理2の(24)が成立し，(25)の $\tilde{a}>0$ が成立していることが確認できる．



第7図

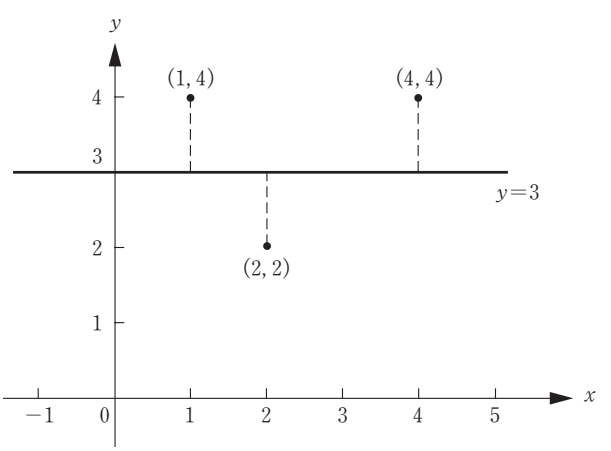


第 8 図

例題 2．⑰を満たす観測値を 1 番目から 3 番目まで順に

$$(1,4),\quad (2,2),\quad (4,4)$$

とする．このとき，y 座標の値が最小であるのは 2 番目の観測値であるから，㉑より $M_1=\{2\}$ であり，㉒より $g=2$ である．また，y 座標の値が最大であるのは 1 番目と 3 番目の観測値であるから，$M_2=$



第 9 図

$\{1, 3\}$ であり，$x_1=1, x_3=4$ であるから，(23)より $k=1, n=3$ である．Chebyshev 基準による回帰直線を求めると，第9図におけるように

$$y=3$$

となる．

3個の観測値を a-b 平面の直線に変換すると，

$$b=-a+4,\ b=-2a+2,\ b=-4a+4$$

となる．これより上部包絡線 $p(a)$ と下部包絡線 $q(a)$ を導き，これに基づいて $r(a)$ が最小になる主問題の最適解 $\tilde{a}$ と $\tilde{b}$，目的関数(12)の最小値 $\tilde{z}$ を求めると，第10図より

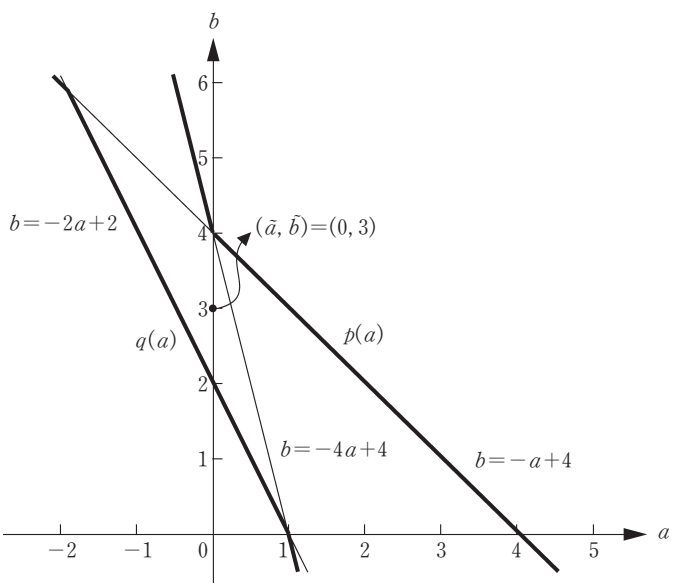
$$\tilde{a}=0,\ \tilde{b}=3,\ \tilde{z}=1$$

である．

この場合，(17)が成立しているので，定理1より最適解は一意であり，

$$x_k=x_1=1<2=x_2=x_g<4=x_3=x_n$$

であるから，定理3の(31)が満たされ，(33)の $\tilde{a}=0$ が成立する．



第10図

参考文献

[1] Appa, G., and C. Smith, "On L_1 and Chebyshev Estimation," *Mathematical Programming*, Vol. 5 (1973), pp. 73-87.

[2] Dolby, J. L., "Graphical Procedure for Fitting the Best Line to a Set of Points," *Technometrics*, Vol. 2 (1960), pp. 477-481.

[3] Farebrother, R. W., "The Historical Development of the L_1 and L_∞ Estimation Procedures," in Y. Dodge (Ed.), *Statistical Data Analysis Based on the L_1-Norm and Related Methods*. Amsterdam : North-

Holland, 1987, pp. 37–63.

［4］ Kelley, J. E., Jr., “An Analysis of Linear Programming to Curve Fitting,” *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 6 (1958), pp. 15–22.

［5］ 尾崎雄一郎，「Chebyshev 基準による回帰直線の特徴づけ定理」，『名城論叢』，第 2 巻，第 4 号(2002 年)，pp. 21–33.

［6］ 尾崎雄一郎，「Chebyshev 基準による原点を通る回帰直線とリニアー・プログラミング」，『名城論叢』，第 3 巻，第 1 号（2002 年)，pp. 1–10.

［7］ 尾崎雄一郎，「Chebyshev 基準による回帰直線の幾何学的導出方法」，『名城論叢』，第 3 巻，第 3 号(2002 年)，pp. 1–8.

［8］ 尾崎雄一郎，「Chebyshev 基準による原点を通る回帰直線の特徴づけ定理」，『名城論叢』，第 3 巻，第 4 号(2003 年)，pp. 59–71.

［9］ 尾崎雄一郎，「Chebyshev 基準による 2 次の回帰曲線の特徴づけ定理」，『名城論叢』，第 4 巻，第 2 号（2003 年)，pp. 1–19.

［10］ Wagner, H. M., “Linear Programming Techniques for Regression Analysis, ” *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 54 (1959), pp. 206–212.