

行動的決定理論に基づくポートフォリオ・モデルの構築

水 沼 洋 人

1 はじめに

Markowitz によるポートフォリオ選択のモデル [1] が提案されて以来、ファイナンスの分野を中心に数多くの研究が行われてきた。現在では、ファイナンス理論、金融経済論、計量経済学、確率過程論、数理統計学、数理計画法、オペレーションズ・リサーチ、コンピュータ・サイエンス等の多くの領域にまたがる学際的应用研究領域として、金融工学あるいは数理ファイナンスとよばれる学問分野が確立されるに至っている。

この分野におけるポートフォリオ・モデルの研究は、主に大規模なポートフォリオ選択問題に対する効率的な計算アルゴリズムの開発である。この研究のねらいは、現実の問題にポートフォリオ・モデルを適用する際に生じる問題点、すなわち実時間内で最適ポートフォリオを如何にして導出させるかにある。これらの研究成果としては、たとえば文献 [2-8] がある。

一方、ポートフォリオ・モデルを現実の問題に適用する際に生じる上記以外の問題点としては、得られた最適ポートフォリオからの解の選択方法が挙げられる。一般に、期待効用理論によって、その解は容易に得られるとされている。しかしながら、現実の問題においては、意思決定者の有する効用を関数として同定することは困難である。このため、意思決定者である投資家は、解の選択に対して望ましいと考えられる解を試行錯誤的に探索していると考えられている。このようなことから、筆者らは、意思決定

者の解に対する満足度水準を考慮した方法 [9, 10] や価値分析を適用した方法 [11] について提案している。また、石井は、望ましき度曲線 [12] を適用した解の選択方法 [13] について提案しているが、一般的にこの種の研究は比較的少ない。

本論文では、解の選択方法に関する問題点の解決をねらいとして、筆者らが提案している意思決定者の解に対する満足度水準を考慮したポートフォリオ・モデルの拡張モデルを提案する。具体的には、行動的決定理論、特に Kahneman と Tversky によるプロスペクト理論 [14] をもとに、解に対する満足度水準の設定の方法およびそのモデル化について提案する。

2 ポートフォリオ・モデル

2.1 Markowitz によるモデル

ここでは、本論文で提案する手法の基礎をなすポートフォリオ・モデルについて概説する。

Markowitz によるポートフォリオ・モデルは、以下の 2 次計画問題として定式化される。

[P 1]

$$\min. \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \quad (1-a)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n \mu_i x_i = E \quad (1-b)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (1-c)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1-d)$$

ここで、 E は期待収益率、 σ_{ij} は第 i 証券と第 j

証券との共分散, μ_i は第 i 証券の収益率, x_i は第 i 証券への投資比率である。

P1 に示されたモデルは, ある任意の期待収益率 E を与え, このもとで分散, すなわちリスクを最小にする解を見出すモデルである。図1に示された投資機会集合上の曲線 $V_{min} E_{max}$ は, 各期待収益率 E とそれによって得られるリスクとの関係を表したものである。この曲線 $V_{min} E_{max}$ は, 一般的に有効フロンティアとよばれており, この曲線上の期待収益率とリスクとの関係は, 図からわかるとおりトレード・オフの関係であることが理解できる。すなわち, 有効フロンティア上の解は, パレート解であることを意味している。

P1 による意思決定は, 一般的には意思決定者の有している効用を用いて解の選択を行うとされている。しかしながら, 現実の問題においては, 各意思決定者の効用を何らかの関数として表現することは困難である。仮に何らかの関数によって同定可能であったとしても, 時間の経過に伴い, その効用関数は若干なりとも変化するものと捉えられるからである。このようなことから, 筆者らは, ファジィ概念 [15] を適用したポートフォリオ・モデルを提案している。

2.2 ファジィ・ポートフォリオ・モデル

P1 によるポートフォリオ・モデルは, その定式化された式の形から一目的の最適化問題として解釈されがちであるが, 上述のとおり, 有効フロンティア上の解がパレート解であることから, 期待収益率最大およびリスク最小とする二目的ポートフォリオ選択問題として定式化する方法が妥当である。

[P 2]

$$\max. \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \quad (2-a)$$

$$\min. \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \quad (2-b)$$

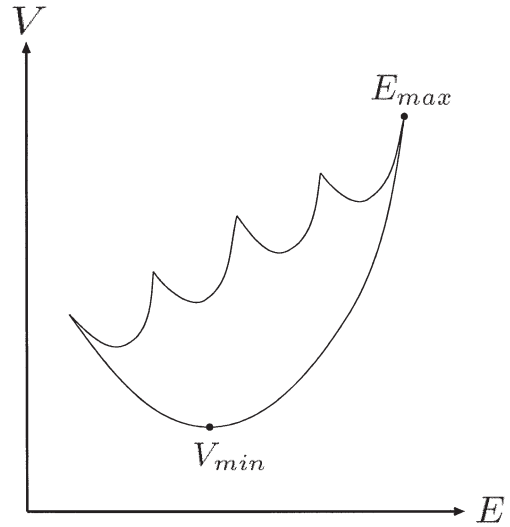


図1 投資機会集合と有効フロンティア

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (2-c)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2-d)$$

P2 による意思決定では, 一般的に対話型システムを利用することによって解を導出している。しかしながら, 意思決定者である投資家は, リスク下で代替案選択を行う際に過去の経験と現状とを照らし合わせて, 得られた結果を評価しているものと考えられている。すなわち, 意思決定者は, あらかじめ期待収益率およびリスクに対して何らかの目標値を有していると判断できる。ただし, これらの目標値は, 明確に規定される場合は少なく, 通常「だいたい～」といったあいまいな目標であると解釈されている。このため, 対話型システムによって解を導出する場合には, その目標となる解の周辺を試行錯誤的に探索せざるを得ない。

筆者らは, 上述のことを踏まえ, 期待収益率およびリスクに対する目標値にファジィ概念を適用した意思決定者の希求水準の満足化を考慮したファジィ・ポートフォリオ・モデルを提案している。その提案手法は, 次のとおりである。

目標期待収益率および目標リスクの各々に対

して意思決定者は、必要レベルおよび十分レベルを設定する。ここで、必要レベルおよび十分レベルとは、前者が最悪の達成度を意味し、後者が十分満足できる達成度を意味している。これより目標期待収益率および目標リスクに対するメンバーシップ関数が作成される。たとえば、線形型のメンバーシップ関数を採用すれば、目標期待収益率は大きくなるほど好ましいため、次のように表される。ただし、 $E(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$ とする。

$$\mu_E(E(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1 & ; E_U \leq E(\mathbf{x}) \\ 1 + \frac{E(\mathbf{x}) - E_U}{E_U - E_L} & ; E_L \leq E(\mathbf{x}) \leq E_U \\ 0 & ; E(\mathbf{x}) \leq E_L \end{cases} \quad (3)$$

また、目標リスクに関しては、小さくなるほど好ましいため、次のように表される。ただし、

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \text{ である。}$$

$$\mu_V(V(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1 & ; V(\mathbf{x}) \leq V_U \\ 1 - \frac{V(\mathbf{x}) - V_U}{V_L - V_U} & ; V_U \leq V(\mathbf{x}) \leq V_L \\ 0 & ; V_L \leq V(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (4)$$

ここで、Bellman と Zadeh による最大化決定 [16] を適用すれば、**P2** は以下のファジィ・ポートフォリオ・モデルとして定式化される。

[P3]

$$\max. \quad \lambda \quad (5-a)$$

$$\text{s.t.} \quad V(\mathbf{x}) + (V_L - V_U)\lambda \leq V_L \quad (5-b)$$

$$E(\mathbf{x}) + (E_L - E_U)\lambda \geq E_L \quad (5-c)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (5-d)$$

$$\lambda, x_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5-e)$$

ここで、 λ は解に対する満足度、 V_L はリスクに対する必要レベル、 V_U はリスクに対する十分レベル、 E_L は期待収益率に対する必要レベル、 E_U は期待収益率に対する十分レベルである。

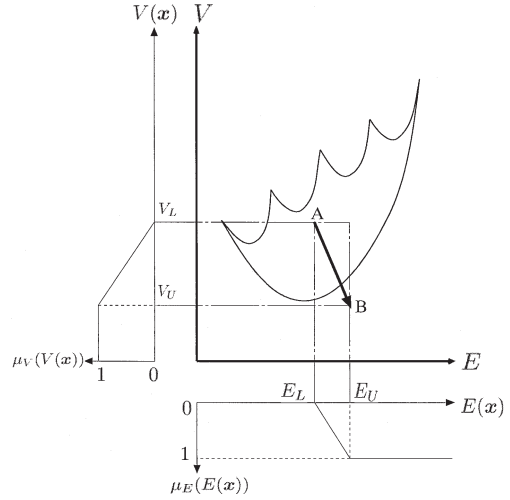


図2 P3による解の探索

この**P3**を利用した解の導出を図2に示す。この図における解は、有効フロンティアと線分ABとの交点である。すなわち、点Aから点Bに向かって解を探索することによって、満足度 λ が増加するためである。

線形型メンバーシップ関数を用いたファジィ・ポートフォリオ・モデルでは、解に対する満足度 λ が1を超えてしまう場合がある。なぜならば、目標期待収益率および目標リスクに関するメンバーシップ関数が、厳密には区分線形であること、また満足度 λ は閉区間 $[0, 1]$ で議論されるため、定式化の際には $E_L \leq E(\mathbf{x}) \leq E_U$ および $V_U \leq V(\mathbf{x}) \leq V_L$ となる定義域のみが考慮されるからである。

P3より得られる解が $\lambda > 1$ となる場合にも、解は一意的に定まる。しかしながら、理論上では、投資機会集合内に $\lambda = 1$ を満足する小領域が包含される形で存在するため、理論的には $\lambda = 1$ を解とする $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ の組が複数存在することになり、投資比率 x_i は一意に定まらないことになる。すなわち、解の選択が困難となる。このため、線形型メンバーシップ関数は、若干の問題点を有することになる。

線形型メンバーシップ関数の有する問題点を解決するために、 $\lambda=1$ を漸近線とするメンバーシップ関数としてシグモイド関数を適用する。その一般式は、以下に示すとおりである。

$$f(x) = \frac{1}{1 + \exp(-\alpha x)} \quad (6)$$

このシグモイド関数型メンバーシップ関数を用いると、目標期待収益率に関しては次のようになる。

$$\mu_E(E(x)) = \frac{1}{1 + \exp(-\alpha_E(E(x) - E_M))} \quad (7)$$

また、目標リスクに関しては、次のとおりである。

$$\mu_V(V(x)) = \frac{1}{1 + \exp(\alpha_V(V(x) - V_M))} \quad (8)$$

ここで、 E_M は目標期待収益率に対する満足度 λ が 0.5 となる期待収益率の値、 V_M は目標リスクに対する満足度 λ が 0.5 となるリスクの値、 α_E および α_V はメンバーシップ関数の形状を決定するパラメータで、ともに $\alpha_E > 0$ 、 $\alpha_V > 0$ である。ただし、パラメータ α_E および α_V とも値を大きくすれば、あいまいさの幅は小さくなる。

これらのメンバーシップ関数を用いて Bellman と Zadeh の最大化決定にしたがえば、**P2** は以下のように定式化される。また、このモデルを利用した解の導出を図 3 に示す。

[P4]

$$\max. \quad \lambda \quad (9-a)$$

$$\text{s.t.} \quad \lambda + \exp(\alpha_V(V(x) - V_M))\lambda \leq 1 \quad (9-b)$$

$$\lambda + \exp(-\alpha_E(E(x) - E_M))\lambda \leq 1 \quad (9-c)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (9-d)$$

$$\lambda, x_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (9-e)$$

基本的に **P4** を用いて解を導出すればよいが、(9-b) 式および (9-c) 式の 2 つの式は、若干複雑な式になっている。たとえば、もとの問題

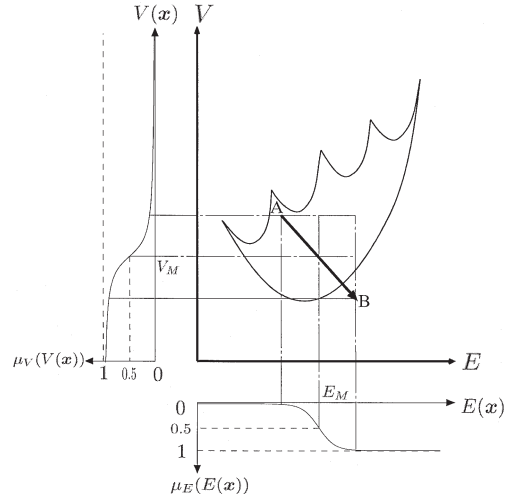


図3 P4による解の探索

が線形モデルであった場合、シグモイド関数を用いたメンバーシップ関数を適用することによって、変換された問題は非線形モデルに帰着されてしまう。すなわち、求解プロセスの観点からすれば、改悪されたことになる。しかしながら、シグモイド関数の有する性質を考慮すれば、この問題点は容易に解決できる。

シグモイド関数 $f(x)$ は、 $f(x)=0$ を漸近線とすることから $\lambda > 0$ である。このため、**P4** の指数関数を含む制約条件式は、次の変形を行うことでより容易なファジィ・ポートフォリオ・モデルに帰着できる。

目標期待収益率に関しては、以下のとおりである。

$$\alpha_E(E(x) - E_M) \geq \log \frac{\lambda}{1-\lambda} \quad (10)$$

また、目標リスクに関しては、以下のとおりである。

$$-\alpha_V(V(x) - V_M) \geq \log \frac{\lambda}{1-\lambda} \quad (11)$$

ここで、 $\log(\lambda/(1-\lambda))$ を λ_t とおくと以下となる。

$$\lambda = \frac{1}{1 + \exp(-\lambda_t)} \quad (12)$$

シグモイド関数は単調増加関数であるため、 λ を最大化することは λ_t を最大化すること、すなわち $\log(\lambda/(1-\lambda))$ を最大化することと等価である。したがって、P4 は、次の P5 と表現できる。

[P5]

$$\max. \lambda_t \quad (13-a)$$

$$\text{s.t.} \quad \alpha_V V(\mathbf{x}) + \lambda_t \leq \alpha_V V_M \quad (13-b)$$

$$\alpha_E E(\mathbf{x}) - \lambda_t \geq \alpha_E E_M \quad (13-c)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (13-d)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (13-e)$$

以上より、実際に解を導出する際には、P4 よりも P5 を用いる方が容易である。ただし、満足度 λ の値を得るためには、P5 から得られた λ_t を (12) 式に代入して求めなければならない。

3 提案モデルの構築

3.1 プロスペクト理論

次に、行動的決定理論、特に Kahneman と Tversky によるプロスペクト理論 [14] について概説する。その後、提案モデルへの構築について議論する。

行動的決定理論とは、主に認知心理学や社会心理学の領域で発展してきた理論であるが、近年、ミクロ経済学、消費者行動論、マーケティング等の領域をも含めて盛んに研究されている。この理論は、規範的な意思決定理論とは異なり、実際の意思決定行動を記述しようとするものである。このため、行動的決定理論では、期待効用理論のような数理科学的側面だけでなく行動科学的側面も有している。特にプロスペクト理論は、行動的決定理論の中でも最も代表的な理論の一つとして位置づけられている。

このプロスペクト理論は、客観的確率や期待効用理論で算出される効用では説明できない人間の心理的な意思決定を説明しようとする叙述

的理論である。すなわち、多くの実験を通じて得られたものである。この理論における平均的な人間の意思決定は、従来の期待効用最大化に基づくものではなく、価値関数を最大化するような意思決定を行うものとされている。その価値関数は、次式のとおりである。

$$V(x, p; y, 1-p) = \pi(p)v(x) + \pi(1-p)v(y) \quad (14)$$

ここで、 $\pi(\cdot)$ はウェイト関数、 $v(\cdot)$ は価値関数あるいは評価関数とよばれている。また、この式の意味は、利得 x を確率 p 、利得 y を確率 $1-p$ で得る場合の価値を表している。ウェイト関数および価値関数のそれぞれを図4および図5に示す。ただし、図4に関しては、文献[17]に掲載のものを参考にしてしている。

図4に示されたウェイト関数は、人間は主観的な評価によって客観的な確率を修正していることを意味している。たとえば、ある意思決定者が完全に合理的であるならば、客観的な確率とその確率に対する主観的な評価は完全に一致する（0と1を通る直線上）。しかしながら、プロスペクト理論における人間、すなわち平均的な意思決定者は、ごく小さな確率を過大評価し、中程度および大きな確率に対しては過小評価する傾向を有していることがわかる。なお、図中の客観的確率とウェイト関数との交点は、0.4程度である。また、このウェイト関数の性質より、意思決定者は利益よりも損失の方を重く感じていることがわかる。

次に、図5に示された価値関数（評価関数）に関して述べる。図中の原点は、参照点あるいはリファレンス・ポイントとよばれる点で、意思決定者がある物事の評価を行う際の基準とする点である。なお、証券投資における参照点は、購入価格が該当するものと考えられている [18]。その他の特徴としては、利益（損失）の増加量とその価値の増加量（減少量）は比例しないことが挙げられる。すなわち、利益（損失）

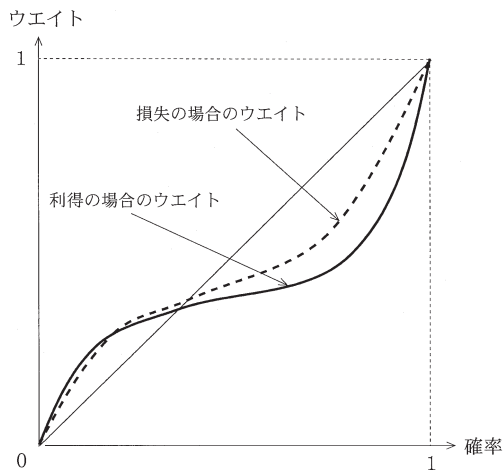


図4 ウェイト関数

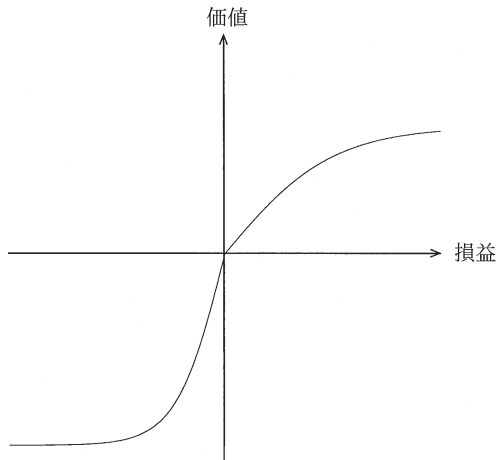


図5 価値関数

の増加量に対する正（負）の価値の増加量は逓減するということである。このことを感応度逓減とよんでいる。さらに、単位あたりの利益の増加による価値の増加量と損失の増加による負の価値の増加量は同じではなく、後者の増加量の方が大きい。つまり、単位あたりの損失の増加は、利益の増加のときよりもその価値の感応度が大きいことを示している。なお、Tversky と Kahneman は、価値関数の特定化に関して追加的な実験を行った。その結果から価値関数 $v(\cdot)$ は、次式のように特定できたと報告して

いる[19]。参考までに、次式による価値関数の形状を図6に示す。

$$v(x) = \begin{cases} x^{0.88} & ; x \geq 0 \\ -2.25(-x^{0.88}) & ; x < 0 \end{cases} \quad (15)$$

プロスペクト理論における意思決定者の判断とその意思決定行動についての特徴を説明する。先にも述べたが、平均的な意思決定者は、利益よりも損失の方を重く感じている。これは利益と損失が同額であるような賭けにおいて、その生起する確率がともに0.5である場合には、その賭けには参加しないことを意味している。このことは、図4の客観的な確率が0.5である場合のウェイトを確認することで容易に理解できる。すなわち、利得の場合のウェイトよりも損失の場合のウェイトの方が大きいため、(14)式から得られる価値そのものは負となるからである。また、利益が出ている場合の判断と損失が生じている場合の判断のそれぞれの意思決定行動に関しても違いがある。たとえば、株価が上昇した後、すなわち図5あるいは図6において正の価値が増加した場合には、投資家である意思決定者は相対的に高い価値を得ている。さらに、この状態から株価が上昇する場合の価値の増加は、感応度逓減によって小さなものでしかない。しかし、株価の下落は大きな価値減少をもたらす。このため、利益が得られている状態の場合には、不確実な利益をより追求するよりも、確実に得られている利益の確保が好まれる。一方、株価が下落した場合には、投資家である意思決定者は負の価値を得ることになる。しかしながら、これ以上の株価下落による負の価値の増加は逓減するのに対し、株価の回復は大きな価値回復につながる。このため、損失が生じている場合には、確実な損失を確定させるよりも不確実な利益、すなわち損失の縮小を追求することが好まれる。これらのことより、平均的な意思決定者は、利益が得られてい

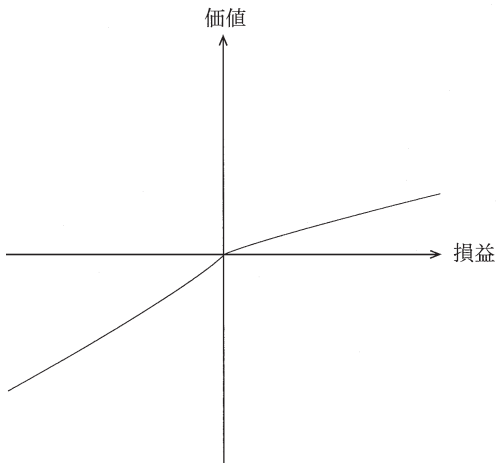


図6 (15)式による価値関数

る場合にはリスク回避的であるが、損失が生じている場合にはリスク愛好的な行動をとるといえる。

3.2 提案モデル

さて、プロスペクト理論で示された意思決定者の判断とその意思決定行動を考慮した提案モデルの構築に関して議論する。先で述べたように、筆者らが提案しているファジィ・ポートフォリオ・モデルでは、意思決定者が希求する目標期待収益率と目標リスクの両者をポートフォリオ・モデルに直接反映させるものであった。この目標期待収益率と目標リスクの設定は、意思決定者自身が設定するものであるが、ここで要求されるパラメータは両指標に対する十分レベルと必要レベルである。このため、より精緻なポートフォリオ・モデルを実現させるためには、図5あるいは図6で示した価値関数の概念をポートフォリオ・モデルに反映させる必要性があると考えられる。すなわち、参照点（リファレンス・ポイント）の設定と負の価値に対する評価である。参照点は、意思決定者がある物事の評価を行う際の基準であり、証券投資においては購入価格そのものと捉えられる。このため、

ポートフォリオ・モデルとしては、文献[20, 21]で提案したモデルを対象とする方が妥当であると考えられるが、ここではより一般的なモデルの構築を試みる。

参照点は、一般的に投資を行った結果、その損益が0となる位置を表すものと判断される。しかしながら、本論文では、投資を行うか否かの状態において、その意思決定者の決定行動をサポートすることをねらいとしている。このため、参照点を次のように定めることとする。

投資家である意思決定者が投資を行うということは、いくらかの利益を期待しての行動であると解釈できる。その際、意思決定者は、現状の社会情勢や経済状況等を考慮して概ね適切であると判断できる範囲内で期待収益率を想定しているものと考えられる。その期待収益率は、各意思決定者によって異なるものであるが、リスクをとって投資するのであるから、たとえば（預貯金金利+ α ）程度の収益率を想定しているものと考えてよいだろう。このように仮定すれば、（預貯金金利+ α ）程度の収益率が期待できない場合には、図5あるいは図6に示された価値関数の損失を表すものと捉えることができる。

一方、ファジィ・ポートフォリオ・モデルにおける目標期待収益率は、意思決定者が希求する期待収益率の目標値を表していた。その際、その目標値は、必要レベルから十分レベルへ向かうほど満足度が大きくなるものとして設定した。この満足度の取りうる範囲は、0から1の間であったため、1に近づくほど満足度は増加する。逆に、0に近づくほどその満足度は減少する、すなわち「満足でない」という度合いが強くなることを表している。このことから、満足度が0.5である場合は、「満足である」と「満足でない」の中間、すなわち中立的な意味合いを有するものと捉えることができる。したがって、価値関数の概念を適用した期待収益率は、

次式によって表される。ただし、 E_R は参照点を表す期待収益率である。

$$\mu_E(E(\mathbf{x})) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \exp(-\alpha_E(E(\mathbf{x}) - E_R))} & ; E(\mathbf{x}) \geq E_R \\ \frac{1}{1 + \exp(-2.25\alpha_E(E(\mathbf{x}) - E_R))} & ; E(\mathbf{x}) < E_R \end{cases} \quad (16)$$

このメンバーシップ関数を定めるために必要なパラメータは、参照点を表す E_R と関数の形状を規定する α_E である。パラメータ α_E は、意思決定者が十分レベルに該当する期待収益率を想定していれば、次式によって比較的容易に求めることが可能である。

$$\alpha_E = \frac{\log \frac{0.99}{1-0.99}}{E_U - E_R} \quad (17)$$

したがって、(16) 式のメンバーシップ関数を定めるためには、意思決定者が参照点を表す期待収益率と十分レベルに該当する期待収益率の2つの目標値を有していればよいことになる。ただし、(16) 式は $\mu_E(E(\mathbf{x}))=1$ を漸近線とすることから、十分レベルを 0.99 などと近似する必要があることに注意しなければならない。

以上より、本論文で提案するポートフォリオ・モデルは、以下のとおりである。

[P 6]

$$\max. \lambda \quad (18-a)$$

$$\text{s.t.} \quad \lambda + \exp(\alpha_V(V(\mathbf{x}) - V_M))\lambda \leq 1 \quad (18-b)$$

$$\lambda + \exp(-\alpha_E(E(\mathbf{x}) - E_R))\lambda \leq 1 \quad (18-c)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (18-d)$$

$$\lambda, x_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (18-e)$$

ただし、このモデルによる解が $\lambda < 0.5$ である場合には、次のモデルによって解を求めることになる。

[P 6']

$$\max. \lambda \quad (19-a)$$

$$\text{s.t.} \quad \lambda + \exp(\alpha_V(V(\mathbf{x}) - V_M))\lambda \leq 1 \quad (19-b)$$

$$\lambda + \exp(-2.25\alpha_E(E(\mathbf{x}) - E_R))\lambda \leq 1 \quad (19-c)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (19-d)$$

$$\lambda, x_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (19-e)$$

4 数 値 例

ここでは提案手法の有効性を確認するために、簡単な数値例として全証券数 30 からなるポートフォリオ選択を行う。データは、日経 225 採用銘柄からランダムに 30 銘柄を抽出したもので、その対象銘柄は、第一製薬、パイオニア、三菱自動車工業、ニコン、KDDI、横浜銀行、野村ホールディングス、損害保険ジャパン、クレディセゾン、静岡銀行、日本水産、キッコーマン、セブンイレブンジャパン、東映、森永製菓、東レ、花王、昭和シェル石油、日本曹達、ブリヂストン、大林組、川崎重工業、ヤマハ、NTN、トピー工業、JR 東日本、商船三井、東京電力、ヤマト運輸および全日本空輸の 30 銘柄である。これらの銘柄に対する収益率 μ_i とリスク $\sigma_{i,j}$ は、2000 年 1 月から 3 年間分の月次収益率をもとに算出した。ただし、月次収益率は次式によって求めた。

$$\text{ある期の月次収益率} = \frac{\text{期末の株価} - \text{期首の株価}}{\text{期首の株価}} \quad (20)$$

また、意思決定者が定める目標期待収益率と目標リスクは、次のように定められるものとした。P 4 に関しては、目標期待収益率の十分レベルを $E_U=0.04$ 、必要レベルを $E_L=0.03$ とし、目標リスクの十分レベルを $V_U=0.015$ 、必要レベルを $V_L=0.025$ とした。シグモイド関数型メンバーシップ関数の形状を表すパラメータ α_E お

よび α_V は、(17)式を用いて算出した。ただし、目標リスクに関するメンバーシップ関数は、目標期待収益率のそれとは逆になるため、次式によって求めている。ここで V_M は、十分レベルと必要レベルの中間の値、すなわち $(V_U + V_L)/2$ である。

$$\alpha_V = \frac{\log \frac{1-0.99}{0.99}}{V_U - V_M} \quad (21)$$

次に **P 6 (P 6')** に関しては、目標期待収益率の十分レベルを $E_U=0.04$ とし、参照点に該当する目標値を $E_R=0.035$ とした。すなわち、**P 4** における $E_M=(E_U+E_L)/2$ が、 E_R と同じ値になるように定めている。また、目標リスクおよびシグモイド関数型メンバーシップ関数の形状を表すパラメータ α_E と α_V は、**P 4** と同様である。

上記のパラメータを用いたポートフォリオ選択の解を表 1 に示す。ここに示された解は、ともに満足度 λ が 0.5 を下回っている。すなわち、「満足である」というよりも「満足ではない」という度合いが大きいと解釈できる解である。仮に満足度 λ が 0.5 以上であれば、**P 4** および **P 6** から得られる解は、まったく同じ解を示すことになる。これは上記で設定したパラメータにおいて $E_M=E_R$ であるため、両モデルは同一のモデルに帰着されるからである。すなわち、ここで議論すべきことは、得られた解が「満足ではない」という意味合いを有する場合である。

さて、表 1 に示された解を再度見てみよう。得られた解は、両モデルとも満足できると解釈されるものではない。特に、本論文で提案したモデルによる解の方が、より低い満足度を示している。しかしながら、得られた期待収益率は、**P 4** による解よりも高い収益率を示している。この理由は、意思決定者の有する希求水準の違いにある。ここで設定したパラメータは、両モデルに対してほぼ同一の値を与えている。異な

表 1 P4および P6 (P6') による解

	満足度 λ	期待収益率	リスク
P4 による解	0.293954	0.034047	0.020953
P6(P6') による解	0.231339	0.034419	0.021307

る点は、目標期待収益率において必要レベルを設定する代わりに参照点に該当する目標値を定めることである。ただし、参照点に該当する目標値は、十分レベルと必要レベルの中間値と同じになるように設定している。このため、パラメータからみた意思決定者の希求水準の違いは、基本的に存在しないと判断できる。しかしながら、必要レベルを与えるのか、あるいは参照点に該当する目標値を与えるのかは、その意味自体に違いがある。すなわち、参照点に該当する目標値を与えるということは、必要レベルを与えるということよりも、より明確に希求水準を有しているものと判断できるからである。このため、参照点に該当する目標値を有する意思決定者にとっては、**P 4** によって近似的に解を求めることは可能であっても、満足度 λ が 0.5 を下回る場合には適切でない。すなわち、参照点に該当する目標値を有する意思決定者にとっては、その目標値を下回することは可能な限り避けたいため、その目標値を下回る場合には満足度 λ は急激に減少することを意味する。また同時に、得られる期待収益率が参照点に該当する目標値を下回るにしても、その減少を可能な限り止めたいと考えていると解釈できる。このことから、**P 4** よりも **P 6 (P 6')** によって解を導出の方が適切である。よって、本提案モデルは、参照点に該当する目標値を有する意思決定者にとっては有効なモデルであると考えられる。

5 おわりに

本論文では、筆者らが提案している意思決定者の解に対する満足度水準を考慮したポートフォリオ・モデルの拡張モデルを提案した。その提案モデルは、行動的決定理論、特に Kahneman と Tversky によるプロスペクト理論で示された価値関数を考慮したモデルである。すなわち、参照点に該当する目標値を直接ポートフォリオ・モデルに反映させ、その目標値が実現されない解に対する満足度水準の設定の方法およびそのモデル化に関するものである。

筆者らが提案しているポートフォリオ・モデル、すなわち **P4** として示されたモデルと本提案手法のポートフォリオ・モデルの相違を示すために、意思決定者によって与えられるパラメータはほぼ同一のものであることを条件に、全証券数 30 からなるポートフォリオ選択問題を扱った。両モデルの定式化の方法により、得られた解を評価するための指標である満足度 λ の値が 0.5 以上である場合には、両モデルによる結果は同一のものであることが示された。また、計算の結果より、満足度 λ が 0.5 を下回る場合には、本提案手法の方が得られる満足度の値は低いものの期待収益率は目標値に近い結果を導出していることがわかった。

以上のことから、**P4** によるモデルで想定される意思決定者と本提案手法で想定される意思決定者の相違は、ともに意思決定者の有する効用を何らかの効用関数によって同定することが困難である点は同一である。しかし、前者のモデルで想定される意思決定者の方が、後者のモデルで想定される意思決定者よりも楽観的であるといえる。このため、意思決定者によって与えられるパラメータから目標期待収益率に対する必要レベルが推定できるものであっても、参照点に該当する目標値を有する意思決定者に対

しては、本提案手法を適用する方がより適切な解を提示できると考えられる。よって、適用するポートフォリオ・モデルは、意思決定者が参照点に該当する目標値を有しているか否かにより区別する必要があるといえる。

一方、ポートフォリオ・モデルで扱われるリスクに対しては、意思決定者がどのように判断しているのか現状では不明である。このため、本論文では、**P4** と同様の方法でその目標値を定めた。今後は、ポートフォリオ・モデルにおけるリスクそのものに関して意思決定者がどのように捉えているのかを明らかにし、このことを考慮したポートフォリオ・モデルの構築について研究していく予定である。

参考文献

- [1] H. M. Markowitz: "Portfolio Selection," *Journal of Finance*, Vol. 12, No. 1, 1952, pp. 77-91.
- [2] A. Perold: "Large Scale Portfolio Optimization," *Management Science*, Vol. 30, No. 10, 1984, pp. 1143-1160.
- [3] H. Konno and H. Yamazaki: "A Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market," *Management Science*, Vol. 37, No. 5, 1991, pp. 519-531.
- [4] H. Konno and K. Suzuki: "A Fast Algorithm for Solving Large Scale Mean-Variance Model by Compact Factorization of Covariance Matrices," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 35, No. 1, 1992, pp. 93-104.
- [5] 今野浩: 「理財工学Ⅰ—平均・分散モデルとその拡張—」, 日科技連, 1995 年。
- [6] 今野浩: 「理財工学Ⅱ—数理計画法による資産運用最適化—」, 日科技連, 1998 年。
- [7] 竹原均: 「ポートフォリオの最適化 (ファイナンス講座 5)」, 朝倉書店, 1997 年。
- [8] 枇々木規雄: 「金融工学と最適化 (経営科学のニューフロンティア 5)」, 朝倉書店, 2001 年。
- [9] H. Mizunuma and J. Watada: "Solving Portfolio Selection with Fuzzy Goals," *Proceedings of*

- the 6th International Fuzzy Systems Association World Congress*, Vol. 2, 1995, pp. 169-172.
- [10] 水沼洋人, 和多田淳三: “ファジィ・ポートフォリオ・セクション—意思決定者の希求水準の実現”, システム制御情報学会論文誌, 第 8 巻, 第 12 号, 1995 年, 677-684 ページ。
- [11] 水沼洋人: “リグレット最小化に基づくポートフォリオ選択”, 名城論叢, 第 1 巻, 第 1 号, 2000 年, 97-102 ページ。
- [12] J. S. Hammond, R. L. Keeney and H. Raiffa: “*Smart Choices*,” Harvard Business School Press, 1999. (小林龍司訳: 「意思決定アプローチ」, ダイアモンド社, 1999 年。)
- [13] 石井吉文: “意思決定理論の現代ポートフォリオ理論への適用”, 証券アナリストジャーナル, 第 37 巻, 第 11 号, 1999 年, 102-111 ページ。
- [14] D. Kahneman and A. Tversky: “Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk,” *Econometrica*, Vol. 47, 1979, pp. 263-291.
- [15] L. A. Zadeh: “Fuzzy Sets,” *Information and Control*, Vol. 8, No. 3, 1965, pp. 338-353.
- [16] R. E. Bellman and L. A. Zadeh: “Decision Making in a Fuzzy Environment,” *Management Science*, Vol. 17, No. 4, 1970, pp. B141-B164.
- [17] A. Tversky and C. Fox: “Weighting Risk and Uncertainty,” *Psychological Review*, Vol. 102, 1995, pp. 269-283.
- [18] J. Goldberg and R. Von Nitzsch: “*Behavioral Finance*,” FinanzBuch Verlag GmbH, 1999. (眞壁昭夫監訳: 「行動ファイナンス」, ダイアモンド社, 2002 年。)
- [19] A. Tversky and D. Kahneman: “Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty,” *Journal of Risk and Uncertainty*, Vol. 5, 1992, pp. 297-323.
- [20] 水沼洋人: “売買単位を考慮したポートフォリオ選択”, 名城論叢, 第 2 巻, 第 2 号, 2001 年, 1-9 ページ。
- [21] 水沼洋人: “売買単位を考慮した区間ポートフォリオ選択”, 名城論叢, 第 2 巻, 第 3 号, 2002 年, 97-103 ページ。