

Chebyshev 基準による 2 次の回帰曲線の特徴づけ定理

尾 崎 雄一郎

1. はじめに

回帰直線(曲線)を求める偏差の絶対値の最大値を最小にする Chebyshev 基準(ミニマックス法)は, 偏差の絶対値の和を最小にする最小絶対値法や偏差の自乗和を最小にする最小自乗法よりも古くから知られていた(Harter [8], pp. 149, 168). しかし, 解を求める一般的な方法が長い間未知であったため Chebyshev 基準による回帰直線は実際上あまり用いられなかった. しかし, Chebyshev 基準による回帰直線を求める問題がリニア・プログラミングの問題として表すことができることが最初 Kelley [10]によって, 次いで Wagner [17]によって示されてから, この方法が見直され, 利用されるようになってきている.

Appa and Smith [1]は Chebyshev 基準による回帰超平面がもつ若干の特徴を示し, 尾崎 [13]は定数項をもつ一般的な回帰直線が一意であるための条件やその傾きが正, 負, ゼロであるための条件など多くの特徴を明らかにした. さらに, 尾崎 [15]はこの回帰直線を求める非常に効率的な幾何学的方法を発見した. 尾崎 [14]は Chebyshev 基準による原点を通る回帰直線を求める一般的な計算式を見出し, それに基づいて若干の特徴を示し, 尾崎 [16]はこの原点を通る回帰直線が一意であるための条件やその直線の傾きが正, 負, あるいはゼロになるための必要十分条件などを明らかにした.

Chebyshev 基準による回帰直線がもつ特徴は現在かなり明らかになってきているけれども, 2 次以上の回帰曲線の特徴については今までまったく考察されたことがない. 本論文の目的は, Chebyshev 基準による 2 次の回帰曲線が一意であるための条件や 2 次の係数の符号が正, 負, あるいはゼロとなるための条件などを 1 次の回帰直線との関連で明らかにすることにある.

2. Chebyshev 基準による回帰直線

独立変数を x , 従属変数を y とし, これらに関する m 個の観測値

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$$

が与えられており, 観測値の数 m は

$$m > 3$$

であるとする. 後の節で必要となる次の Chebyshev 基準による回帰直線

$$(1) \quad y = bx + c$$

に関する若干の特徴を本節で述べる.

直線(1)と i 番目の観測値との偏差 d_i を

$$d_i = y_i - (bx_i + c) \quad (i = 1, \dots, m)$$

と定義すると,

$$z = \max_{i=1, \dots, m} |d_i|$$

を最小にする非線形計画法の問題は,

$$(2) \quad z$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$(3) \quad bx_i + c + z \geq y_i, \quad -bx_i - c + z \geq -y_i \quad (i=1, \dots, m), \quad z \geq 0$$

というリニア・プログラミングの問題に変換できる (Appa and Smith [1], Kelley [10], 尾崎 [13], [15], Wagner [17]などを参照). この主問題に対する双対問題は,

$$(4) \quad \sum_{i=1}^m y_i (u_i - v_i)$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$(5) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_i (u_i - v_i) &= 0, \quad \sum_{i=1}^m (u_i - v_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^m (u_i + v_i) \leq 1 \\ u_i &\geq 0, \quad v_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \end{aligned}$$

と表せる.

与えられた観測値に対して

$$(6) \quad x_i \neq x_j \quad (i, j=1, \dots, m; i \neq j)$$

が成立するならば, Chebyshev 基準による回帰直線(1)は一意に定まる (尾崎 [13], 定理 5). このとき, (i)回帰直線の上方に位置する 1 つの観測値と下方に位置する 2 つの観測値との偏差の絶対値が最大で, 上方に位置する観測値の x 座標は下方に位置する 2 つの観測値の x 座標による開区間内にあるか, (ii)回帰直線の上方に位置する 2 つの観測値と下方に位置する 1 つの観測値との偏差の絶対値が最大で, 下方に位置する観測値の x 座標は上方に位置する 2 つの観測値の x 座標による開区間内にある, という事実のいずれかを満たす Chebyshev 基準による回帰直線が存在する (尾崎 [13], 定理 7). 観測値の番号は任意であるので, 上記(i)の場合には回帰直線の下方にあってその偏差の絶対値が最大である 2 つの観測値を (x_1, y_1) と (x_3, y_3) , 上方にあってその偏差の絶対値が最大である観測値を (x_2, y_2) とし, (ii)の場合には回帰直線の上方にあってその偏差の絶対値が最大である 2 つの観測値を (x_1, y_1) と (x_3, y_3) , 下方にあってその偏差の絶対値が最大である観測値を (x_2, y_2) と仮定しても一般性を失うことはない. (6)が成立するとき, 上記(i)と(ii)いずれの場合にも一般性を失うことなく,

$$(7) \quad x_1 < x_2 < x_3$$

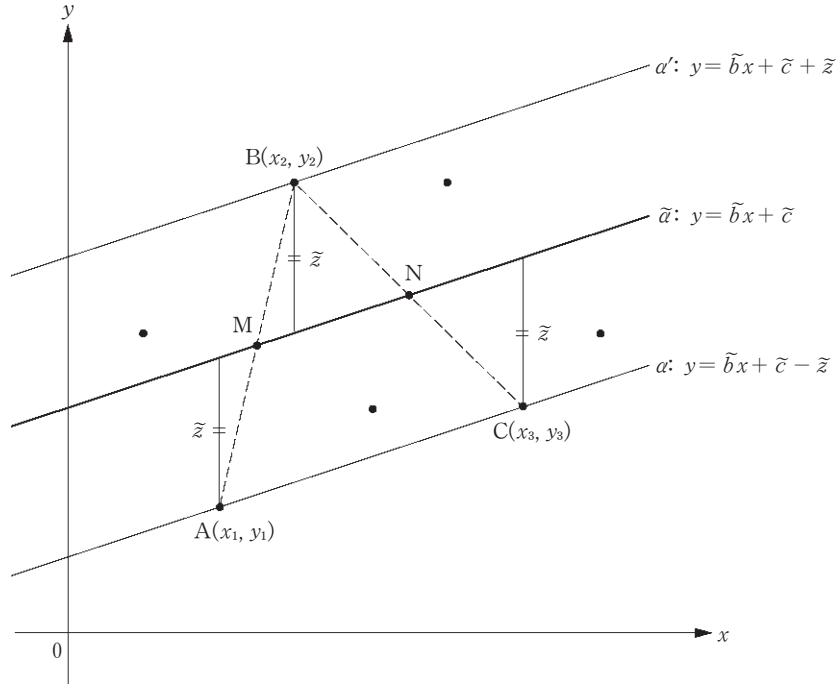
と仮定できる.

主問題(2)-(3)と双対問題(4)-(5)には最適解が存在する (尾崎 [13], 定理 1) から, 主問題の最適解を $\tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{z}$, 双対問題の最適解を $\tilde{u}_i, \tilde{v}_i (i=1, \dots, m)$ とすると, (i)の場合 Chebyshev 基準による回帰直線 $\tilde{\alpha}$ は第 1 図のように

$$(8) \quad y = \tilde{b}x + \tilde{c}$$

と表せ, (8)は観測値 $A(x_1, y_1)$ と $B(x_2, y_2)$ の中点 M と観測値 B と $C(x_3, y_3)$ の中点 N を通る直線である (尾崎 [15]を参照). 直線(8)より下方にあって観測値 A と C を通る直線 α は

$$(9) \quad y = \tilde{b}x + \tilde{c} - \tilde{z}$$



第 1 図

と表せ、観測値 B を通り(8)と(9)に平行な直線 α' は

$$(10) \quad y = \tilde{b}x + \tilde{c} + \tilde{z}$$

と表せる。ここで、

$$(11) \quad \begin{aligned} \tilde{b} &= \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}, \quad \tilde{c} = \frac{(x_2 + x_3)y_1 + (x_3 - x_1)y_2 - (x_1 + x_2)y_3}{2(x_3 - x_1)} \\ \tilde{z} &= \frac{(x_2 - x_3)y_1 + (x_3 - x_1)y_2 + (x_1 - x_2)y_3}{2(x_3 - x_1)} \end{aligned}$$

である。すべての観測値は 2 つの平行な直線 (9) の α と (10) の α' の間にあり、すべての観測値が 1 つの直線上に並んでいることはないと仮定すると、 $\tilde{z} > 0$ である(尾崎 [13], 定理 2)。

(ii) の場合、Chebyshev 基準による回帰直線 $\tilde{\alpha}$ は第 2 図のようになり、その方程式は(8)と同じである。回帰直線(8)の上方にあって観測値 A と C を通る直線 α は

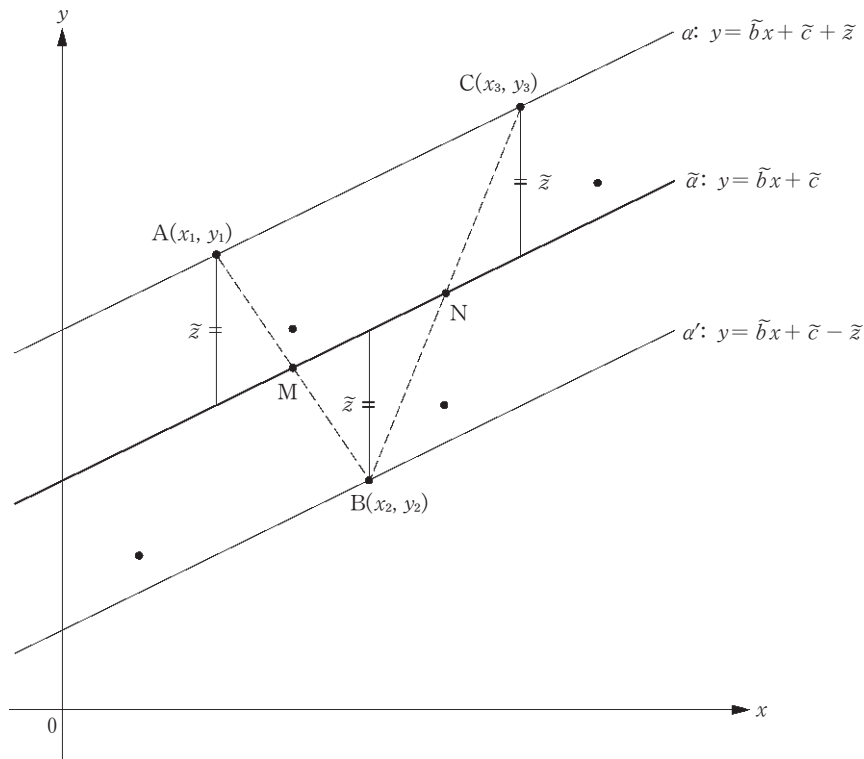
$$(12) \quad y = \tilde{b}x + \tilde{c} + \tilde{z}$$

と表せ、(8)に平行で観測値 B を通る直線 α' は

$$(13) \quad y = \tilde{b}x + \tilde{c} - \tilde{z}$$

と表せる。この場合、

$$(14) \quad \begin{aligned} \tilde{b} &= \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}, \quad \tilde{c} = \frac{(x_2 + x_3)y_1 + (x_3 - x_1)y_2 - (x_1 + x_2)y_3}{2(x_3 - x_1)} \\ \tilde{z} &= \frac{(x_3 - x_2)y_1 + (x_1 - x_3)y_2 + (x_2 - x_1)y_3}{2(x_3 - x_1)} \end{aligned}$$



第2図

である。この場合にもすべての観測値は2つの直線(12)の α と(13)の α' の間にあり、 $\tilde{z} > 0$ で、回帰直線 $\tilde{\alpha}$ からの偏差の絶対値は $\tilde{z}$ 以下である。

3. Chebyshev 基準による2次の回帰曲線とリニアール・プログラミング

以下において Chebyshev 基準による次の2次の回帰曲線(放物線)

$$(15) \quad y = ax^2 + bx + c$$

を求める問題について考察する。この放物線(15)と i 番目の観測値との偏差 e_i を

$$e_i = y_i - (ax_i^2 + bx_i + c) \quad (i = 1, \dots, m)$$

とする。このとき、

$$z = \max_{i=1, \dots, m} |e_i|$$

を最小にする Chebyshev 基準によって放物線(15)の係数 a, b, c を決定する問題は、

$$(16) \quad z$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$(17) \quad ax_i^2 + bx_i + c + z \geq y_i, \quad -ax_i^2 - bx_i - c + z \geq -y_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad z \geq 0$$

というリニアール・プログラミングの問題になる。この主問題に対する双対問題は、

$$(18) \quad \sum_{i=1}^m y_i (u_i - v_i)$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$(19) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_i^2 (u_i - v_i) &= 0, \quad \sum_{i=1}^m x_i (u_i - v_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^m (u_i - v_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^m (u_i + v_i) \leq 1 \\ u_i &\geq 0, \quad v_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \end{aligned}$$

と表せる。

4. 2 次の回帰曲線の特徴づけ定理

本節において Chebyshev 基準による 2 次の回帰曲線がもつ特徴を明らかにする。

定理 1. 主問題(16)–(17)と双対問題(18)–(19)の各々に最適解が存在する。

証明. いま, $a^0 = b^0 = c^0 = 0$, $z^0 = \max_{i=1, \dots, m} (y_i, -y_i)$ とすると, これらは主問題の制約条件(17)を満たす。

また, $u_i^0 = v_i^0 = 0 (i=1, \dots, m)$ とすると, これらは双対問題の制約条件(19)を満たす。主問題と双対問題の各々に実行可能解が存在するので, 双対定理の 1 つ (Collatz and Wetterling [3], p. 93, Cooper and Steinberg [4], p. 171, Gale [5], pp. 78–82, Gass [6], p. 162, Krekó [11], pp. 194–195 など) によって主問題と双対問題の各々に最適解が存在する。 Q. E. D.

以下において主問題(16)–(17)の最適解を $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{z}$ とし, 双対問題(18)–(19)の最適解を $\tilde{u}_i$, $\tilde{v}_i (i=1, \dots, m)$ と表す。

定理 2. すべての観測値が同一の直線や同一の放物線上に並んでいることはないと仮定すると, $\tilde{z} > 0$ である。

証明. 結論に反して $\tilde{z} = 0$ とすると, 制約条件(17)より

$$\tilde{a} x_i^2 + \tilde{b} x_i + \tilde{c} \geq y_i, \quad -\tilde{a} x_i^2 - \tilde{b} x_i - \tilde{c} \geq -y_i \quad (i=1, \dots, m)$$

となり, これらより

$$\tilde{a} x_i^2 + \tilde{b} x_i + \tilde{c} = y_i \quad (i=1, \dots, m)$$

をえる。これより, すべての観測値が同一の直線上に並んでいる ($\tilde{a} = 0$ の場合) か, 同一の放物線上に並んでいる ($\tilde{a} \neq 0$ の場合) ことになり, 仮定に矛盾する。ゆえに, $\tilde{z} > 0$ でなければならない。

Q. E. D.

以後すべての観測値が同一の直線上や放物線上に並んでいることはないと仮定する。

定理 3. 双対問題(18)–(19)の最適解において

$$(20) \quad \tilde{u}_i \tilde{v}_i = 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

が成立する。

証明. (20)に反してある番号 j に対して同時に $\tilde{u}_j > 0$, $\tilde{v}_j > 0$ となるならば, 相補弛緩定理 (Chvátal

[2], pp. 62-64, Collatz and Wetterling [3], pp. 92-93, 96-97, Cooper and Steinberg [4], pp. 174-175, Gale [5], pp. 19-20, Gass [6], pp. 168-170, Hadley [7], pp. 239-241, Krekó [11], p. 196, Murty [12], pp. 197-198などを参照)によって, j 番目の観測値に対して

$$\tilde{a}x_j^2 + \tilde{b}x_j + \tilde{c} + \tilde{z} = y_j, \quad -\tilde{a}x_j^2 - \tilde{b}x_j - \tilde{c} + \tilde{z} = -y_j$$

が成立し, これより $\tilde{z} = 0$ となるが, これは定理2に矛盾する. したがって, (20)が成立しなければならない. Q. E. D.

定理4. (6)が成立するならば, 双対問題(18)-(19)の最適解において, 少なくとも1つの $\tilde{u}_i$ と1つの $\tilde{v}_i$ を伴う全部で4個の $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ が正で, 残りの $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ はすべてゼロである.

証明. 双対問題(18)-(19)の最適解に対して $\tilde{w}_i$ を $\tilde{w}_i = \tilde{u}_i - \tilde{v}_i (i=1, \dots, m)$ と定める. 最初に, $m-3$ 個の $\tilde{w}_i$ がゼロであると仮定し, 簡単化のために $\tilde{w}_i = 0 (i=4, \dots, m)$ とすると, (19)の最初の3個の方程式より

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる. この左辺の係数行列からなる Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3) \neq 0$$

は, (6)に注意すると, ゼロではないから, 先の方程式の解は $\tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 = \tilde{w}_3 = 0$ となり, 結局すべての $\tilde{w}_i$ がゼロとなる. このことと定理3の(20)よりすべての $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ がゼロになり, これより目的関数(18)の最大値はゼロになる. すると, 双対定理の1つ(Chvátal [2], pp. 58-59, 141-143, Collatz and Wetterling [3], pp. 90-92, Cooper and Steinberg [4], pp. 163-164, Gass [6], pp. 158-161, Hadley [7], pp. 229-230, Krekó [11], pp. 193-194, Murty [12], p. 192など)によって $\tilde{z} = 0$ となり, これは定理2に矛盾する. 同様にして $m-2$ 個以上の $\tilde{w}_i$ がゼロとなることもない. 以上より, $m-4$ 個以下の $\tilde{w}_i$ がゼロである, すなわち4個以上の $\tilde{w}_i$ がゼロではない. このことより4個以上の $\tilde{u}_i, \tilde{v}_i$ が正でなければならない. ところで, (19)には変数の非負性の条件を除いて4本の制約式があり, リニアール・プログラミングの問題の最適解は基底解である(Gale [5], p. 84, Hadley [7], p. 103, Murty [12], p. 123など)から, $\tilde{u}_i, \tilde{v}_i$ 合わせて丁度4個が正でなければならない. さらに, 定理3の(20)より同じ i に対して $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ が同時に正となることはなく, また(19)の3番目の式から4個の $\tilde{u}_i$ あるいは4個の $\tilde{v}_i$ が正となることもないので, ゼロではない4個の $\tilde{u}_i, \tilde{v}_i$ の中で少なくとも1つの $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ が正であり, 正となる4個以外の $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ はすべてゼロでなければならない. Q. E. D.

定理5. (6)が成立するならば, Chebyshev 基準による2次の回帰曲線(15)は一意に定まる.

証明. 定理4より(6)が成立するならば, 異なる番号の4個の $\tilde{u}_i, \tilde{v}_i$ が正でなければならない. 双対問題の制約条件(19)には非負性の条件を除いて4本の式があるので, 双対問題の最適解は退化せず,

したがって主問題(16)–(17)の最適解は一意に定まる (Chvátal [2], p. 65, Krukó [11], p. 195, Murty [12], p. 140 などを参照). Q. E. D.

定理 6. Chebyshev 基準による 2 次の回帰曲線(15)が一意でないならば, (6)が成立せず x 座標の等しい 2 つの観測値が存在する.

証明. 定理 5 の対偶により(15)が一意でないならば, (6)は成立せず, したがって x 座標が等しい 2 つの観測値が存在する. Q. E. D.

定理 7. (6)が成立するとき, 双対問題(18)–(19)の最適解における 4 個の正の双対変数に対する観測値を

$$(x_g, y_g), (x_h, y_h), (x_k, y_k), (x_n, y_n)$$

とし,

$$(21) \quad x_g < x_h < x_k < x_n$$

とすると, 最適な正の双対変数は交互に

$$(22) \quad \tilde{u}_g > 0, \tilde{v}_h > 0, \tilde{u}_k > 0, \tilde{v}_n > 0$$

であるか, あるいは

$$(23) \quad \tilde{v}_g > 0, \tilde{u}_h > 0, \tilde{v}_k > 0, \tilde{u}_n > 0$$

である.

証明. 定理 2 により $\tilde{z} > 0$ であるから, 相補弛緩定理によって双対問題の制約条件(19)の 4 番目の不等式が等号で成立するという事実と, 定理 4 より丁度 4 個の $\tilde{u}_i, \tilde{v}_i$ が正で, これらのうち少なくとも 1 つの $\tilde{u}_i$ と 1 つの $\tilde{v}_i$ が正であるという事実を以下で用いる. まず最初に,

$$(24) \quad \tilde{u}_g > 0, \tilde{u}_h > 0, \tilde{v}_k > 0, \tilde{v}_n > 0$$

が成立しえないことを示す. (19)と(24)より

$$\begin{aligned} x_g \tilde{u}_g + x_h \tilde{u}_h &= x_k \tilde{v}_k + x_n \tilde{v}_n \\ \tilde{u}_g + \tilde{u}_h &= \tilde{v}_k + \tilde{v}_n \\ \tilde{u}_g + \tilde{u}_h + \tilde{v}_k + \tilde{v}_n &= 1 \end{aligned}$$

をえる. この 1 番目の式は

$$(25) \quad (2 \tilde{u}_g)x_g + (2 \tilde{u}_h)x_h = (2 \tilde{v}_k)x_k + (2 \tilde{v}_n)x_n$$

と表せ, 2 番目と 3 番目の式より

$$\begin{aligned} 2 \tilde{u}_g + 2 \tilde{u}_h &= 1, \tilde{u}_g > 0, \tilde{u}_h > 0 \\ 2 \tilde{v}_k + 2 \tilde{v}_n &= 1, \tilde{v}_k > 0, \tilde{v}_n > 0 \end{aligned}$$

と表せるから, これらと(21)より

$$(26) \quad \begin{aligned} x_g &< (2 \tilde{u}_g)x_g + (2 \tilde{u}_h)x_h < x_h \\ x_k &< (2 \tilde{v}_k)x_k + (2 \tilde{v}_n)x_n < x_n \end{aligned}$$

をえるけれども, (21)に注意すると, (25)と(26)は矛盾する. ゆえに, (24)は成立しえない. 同様に,

$$(27) \quad \tilde{u}_g > 0, \tilde{u}_h > 0, \tilde{u}_k > 0, \tilde{v}_n > 0$$

$$(28) \quad \tilde{u}_g > 0, \tilde{v}_h > 0, \tilde{v}_k > 0, \tilde{v}_n > 0$$

も成立しえない.

次に,

$$(29) \quad \tilde{u}_g > 0, \tilde{v}_h > 0, \tilde{v}_k > 0, \tilde{u}_n > 0$$

が成立しえないことを示す。(19)と(29)より

$$\begin{aligned} x_g^2 \tilde{u}_g - x_h^2 \tilde{v}_h - x_k^2 \tilde{v}_k &= -x_n^2 \tilde{u}_n \\ x_g \tilde{u}_g - x_h \tilde{v}_h - x_k \tilde{v}_k &= -x_n \tilde{u}_n \\ \tilde{u}_g - \tilde{v}_h - \tilde{v}_k &= -\tilde{u}_n \end{aligned}$$

をえる。これより, Cramer のルールを用いて解くと,

$$\tilde{u}_g = \frac{(x_h - x_n)(x_n - x_k)}{(x_h - x_g)(x_k - x_g)} \tilde{u}_n$$

となるけれども, (21)に注意すると, $\tilde{u}_n > 0$ に対して $\tilde{u}_g < 0$ となって矛盾するから, (29)は成立しえない。同様に,

$$(30) \quad \tilde{u}_g > 0, \tilde{v}_h > 0, \tilde{u}_k > 0, \tilde{u}_n > 0$$

$$(31) \quad \tilde{u}_g > 0, \tilde{u}_h > 0, \tilde{v}_k > 0, \tilde{u}_n > 0$$

も成立しえない。また, (24)さらに(27)から(31)までの6個の式の各々において $\tilde{u}_g$ を $\tilde{v}_g$ に, $\tilde{v}_k$ を $\tilde{u}_k$ とするように $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ をすべて交換したのも同様に成立しえない。

以上の他に少なくとも1つの $\tilde{u}_i$ と1つの $\tilde{v}_i$ が正であるものは(22)と(23)以外にはない。(22)と(23)は $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ をすべて入れ替えたものであるから, 結論に反しても(22)が成立しえないならば, (23)も成立しえない。すると, 双対問題の最適解において少なくとも1つの $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ が正で, 丁度4個の $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ が正となるようなものは1組も存在しないことになり, 定理4に矛盾する。したがって, (22)あるいは(23)が成立しなければならない。 Q. E. D.

定理 8. (6)が成立するとき, 偏差が $\tilde{z}$ である(21)を満たす4個の観測値 (x_g, y_g) , (x_h, y_h) , (x_k, y_k) , (x_n, y_n) はこの順に最適な2次の回帰曲線の上と下, あるいは下と上に交互に位置する。

証明. 定理7より(22)か(23)が成立する。(22)が成立する場合, 相補弛緩定理によって主問題の制約条件(17)より

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= y_g - (\tilde{a}x_g^2 + \tilde{b}x_g + \tilde{c}) \\ \tilde{z} &= \tilde{a}x_h^2 + \tilde{b}x_h + \tilde{c} - y_h \\ \tilde{z} &= y_k - (\tilde{a}x_k^2 + \tilde{b}x_k + \tilde{c}) \\ \tilde{z} &= \tilde{a}x_n^2 + \tilde{b}x_n + \tilde{c} - y_n \end{aligned}$$

となり, 定理2より, $\tilde{z} > 0$ であるから, (x_g, y_g) と (x_k, y_k) が最適な2次の回帰曲線の上方に, (x_h, y_h) と (x_n, y_n) が下方に位置する。

(23)が成立する場合はこの逆になる。

Q. E. D.

Hastings ([9], pp. 4, 7, 12)は定理8の内容に気づき, 証明なしに図による例でこのことを示した。

定理 9. 2次の回帰曲線に関する主問題(16)–(17)の最小値 $\tilde{z}$ は1次の回帰直線に関する主問題(2)–(3)の最小値 $\bar{z}$ 以下, すなわち

$$(32) \quad \tilde{z} \leq \tilde{z}$$

である。

証明. 制約条件(19)の実行可能解の集合は制約条件(5)の実行可能解の集合の真部分集合であるから、目的関数(18)の最大値は目的関数(4)の最大値以下である。双対定理により各々の主問題の最小値と双対問題の最大値は等しいから、

$$\tilde{z} = \sum_{i=1}^m y_i (\tilde{u}_i - \tilde{v}_i) \leq \sum_{i=1}^m y_i (\tilde{u}_i - \tilde{v}_i) = \tilde{z}$$

であり、(32)をえる。

Q. E. D.

定理 10. 3 個の観測値 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) に対して(7)が成立するものとする。さらに、(i) Chebyshev 基準による回帰直線(8)に対して(11)が成立する場合には、2 次の回帰曲線(15)の最適な係数 $\tilde{a}$ は、

$$(33) \quad \tilde{a} \leq 0$$

であり、(ii) Chebyshev 基準による回帰直線(8)に対して(14)が成立する場合には、(15)の最適な係数 $\tilde{a}$ は、

$$(34) \quad \tilde{a} \geq 0$$

である。

証明. 3 個の観測値 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) に関して定理 9 を適用すると、(i)が成立する場合、(3), (17), (32)より

$$(35) \quad \begin{aligned} \tilde{z} &= \tilde{b}x_1 + \tilde{c} - y_1 \geq \tilde{z} \geq \tilde{a}x_1^2 + \tilde{b}x_1 + \tilde{c} - y_1 \\ \tilde{z} &= y_2 - \tilde{b}x_2 - \tilde{c} \geq \tilde{z} \geq y_2 - \tilde{a}x_2^2 - \tilde{b}x_2 - \tilde{c} \\ \tilde{z} &= \tilde{b}x_3 + \tilde{c} - y_3 \geq \tilde{z} \geq \tilde{a}x_3^2 + \tilde{b}x_3 + \tilde{c} - y_3 \end{aligned}$$

が成立する。(35)より

$$(36) \quad \begin{aligned} -\tilde{a}x_1^2 - \tilde{b}x_1 - \tilde{c} &\geq -\tilde{b}x_1 - \tilde{c} \\ \tilde{a}x_2^2 + \tilde{b}x_2 + \tilde{c} &\geq \tilde{b}x_2 + \tilde{c} \\ -\tilde{a}x_3^2 - \tilde{b}x_3 - \tilde{c} &\geq -\tilde{b}x_3 - \tilde{c} \end{aligned}$$

をえる。(36)の最初の 2 つの不等式を加え、(7)に注意すると、

$$(37) \quad \tilde{a}(x_1 + x_2) + \tilde{b} \geq \tilde{b}$$

をえ、同様に(36)の 2 番目と 3 番目の不等式を加え、(7)を考慮すると、

$$(38) \quad \tilde{a}(x_2 + x_3) + \tilde{b} \leq \tilde{b}$$

をえる。(37)と(38)より

$$\tilde{a}(x_1 - x_3) \geq 0$$

となり、これより(7)に注意すると、(33)をえる。

(ii)が成立する場合、(3), (17), (32)より

$$(39) \quad \begin{aligned} \tilde{z} &= y_1 - \tilde{b}x_1 - \tilde{c} \geq \tilde{z} \geq y_1 - \tilde{a}x_1^2 - \tilde{b}x_1 - \tilde{c} \\ \tilde{z} &= \tilde{b}x_2 + \tilde{c} - y_2 \geq \tilde{z} \geq \tilde{a}x_2^2 + \tilde{b}x_2 + \tilde{c} - y_2 \\ \tilde{z} &= y_3 - \tilde{b}x_3 - \tilde{c} \geq \tilde{z} \geq y_3 - \tilde{a}x_3^2 - \tilde{b}x_3 - \tilde{c} \end{aligned}$$

が成立する。(39)より

$$\begin{aligned}
(40) \quad & \tilde{a}x_1^2 + \tilde{b}x_1 + \tilde{c} \geq \tilde{b}x_1 + \tilde{c} \\
& -\tilde{a}x_2^2 - \tilde{b}x_2 - \tilde{c} \geq -\tilde{b}x_2 - \tilde{c} \\
& \tilde{a}x_3^2 + \tilde{b}x_3 + \tilde{c} \geq \tilde{b}x_3 + \tilde{c}
\end{aligned}$$

をえる。(40)の最初の2つの不等式を加え、(7)に注意すると、

$$(41) \quad \tilde{a}(x_1 + x_2) + \tilde{b} \leq \tilde{b}$$

をえ、同様に(40)の2番目と3番目の式より

$$(42) \quad \tilde{a}(x_2 + x_3) + \tilde{b} \geq \tilde{b}$$

となり、(41)と(42)より

$$\tilde{a}(x_3 - x_1) \geq 0$$

をえる。(7)に注意すると、これより(34)をえる。

Q. E. D.

定理 11. (6)が成立するとき、

$$(43) \quad \tilde{\tilde{z}} = \tilde{z}$$

であるための必要十分条件は、

$$(44) \quad \tilde{a} = 0$$

である。

証明. (43)が成立すると仮定する。(3)と(17)と最適解の定義よりすべての i に対して

$$(45) \quad \tilde{b}x_i + \tilde{c} + \tilde{z} \geq y_i, \quad -\tilde{b}x_i - \tilde{c} + \tilde{z} \geq -y_i$$

$$(46) \quad \tilde{a}x_i^2 + \tilde{b}x_i + \tilde{c} + \tilde{\tilde{z}} \geq y_i, \quad -\tilde{a}x_i^2 - \tilde{b}x_i - \tilde{c} + \tilde{\tilde{z}} \geq -y_i$$

が成立する。もし(43)が成立するならば、(46)は

$$(47) \quad \tilde{a}x_i^2 + \tilde{b}x_i + \tilde{c} + \tilde{z} \geq y_i, \quad -\tilde{a}x_i^2 - \tilde{b}x_i - \tilde{c} + \tilde{z} \geq -y_i$$

となる。(45)に注意すると、 $\tilde{a} = 0$, $\tilde{b} = \tilde{b}$, $\tilde{c} = \tilde{c}$ は(47)を満たすから、主問題(16)–(17)の最適解である。

定理 5 より(6)が成立するならば、最適解は一意であるから、以上より(43)が成立するならば、(44)が成立する。

逆に、(44)が成立するならば、 $\tilde{b} = \tilde{b}$, $\tilde{c} = \tilde{c}$ とすると、(46)よりすべての i に対して

$$\tilde{b}x_i + \tilde{c} + \tilde{\tilde{z}} \geq y_i, \quad -\tilde{b}x_i - \tilde{c} + \tilde{\tilde{z}} \geq -y_i$$

が成立する。これと(45)より $\tilde{\tilde{z}} \geq \tilde{z}$ であるが、定理 9 の(32)より $\tilde{\tilde{z}} \leq \tilde{z}$ であるから、(43)をえる。

Q. E. D.

定理 12. (6)が成立するとき、

$$(48) \quad \tilde{\tilde{z}} < \tilde{z}$$

であるための必要十分条件は、(i) Chebyshev 基準による回帰直線(8)と $\tilde{z}$ に対して(11)が成立する場合には、

$$(49) \quad \tilde{a} < 0$$

であり、(ii) Chebyshev 基準による回帰直線(8)と $\tilde{z}$ に対して(14)が成立する場合には、

$$(50) \quad \tilde{a} > 0$$

である。

証明. (i)が成立する場合、定理 9 の(32)、定理 10 の(33)と定理 11 より、(48)が成立するための必要十

分条件は(49)であり, (ii)が成立する場合, (32), (34)と定理 11 より, (48)が成立するための必要十分条件は(50)である. Q. E. D.

定理 12 の必要性の別証. (48)が成立すると仮定する. (i)が成立するならば, 定理 10 の証明の中の(35), (36), (37), (38)が強い不等号で成立するから,

$$\tilde{a}(x_1 - x_3) > 0$$

をえ, (7)に注意すると, これより(49)をえる. (ii)が成立する場合, 定理 10 の証明の中の(39), (40), (41), (42)が強い不等号で成立するので,

$$\tilde{a}(x_3 - x_1) > 0$$

をえ, (7)に注意すると, これより(50)をえる. Q. E. D.

定理 13. 3 個の観測値 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) に対して(7)が成立し, (i) (x_1, y_1) と (x_3, y_3) が直線(9)の上に, (x_2, y_2) が直線(10)の上にあり, これらの直線を決定する $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{z}$ が(11)で与えられる場合, 第 4 の観測値 (x_4, y_4) が直線(10)の上に位置し,

$$(51) \quad x_4 < x_1, \quad x_3 < x_4$$

のいずれかを満たすか, あるいは(ii) (x_1, y_1) と (x_3, y_3) が直線(12)の上に, (x_2, y_2) が直線(13)の上にあり, これらの直線を決定する $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{z}$ が(14)で与えられる場合, 第 4 の観測値 (x_4, y_4) が直線(13)の上に位置し, (51)のいずれかを満たすならば, 定理 11 の(43)が成立し, したがって(44)が成立する.

証明. (i)の場合, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) から定理 10 の(33)をえ, また, (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) あるいは (x_4, y_4) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) から(34)をえる. したがって, これらより定理 11 の(44)をえる.

(ii)の場合も同様に証明できる. Q. E. D.

定理 14. 3 個の観測値 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) に対して(7)が成立し, (i) (x_1, y_1) と (x_3, y_3) が直線(9)の上に, (x_2, y_2) が直線(10)の上に位置し, これらの直線を決定する $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{z}$ が(11)で与えられる場合, 他のすべての観測値がこれら 2 直線の上になく, これらの間にあるならば,

$$(52) \quad \tilde{a} < 0$$

であり, (ii) (x_1, y_1) と (x_3, y_3) が直線(12)の上に, (x_2, y_2) が直線(13)の上に位置し, これらの直線を決定する $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{z}$ が(14)で与えられる場合, 他のすべての観測値がこれら 2 直線の上になく, これらの間にあるならば,

$$(53) \quad \tilde{a} > 0$$

である.

証明. (i)の場合, 仮定により

$$(54) \quad \begin{aligned} &\tilde{b}x_i + \tilde{c} + \tilde{z} > y_i, \quad -\tilde{b}x_i - \tilde{c} + \tilde{z} = -y_i \quad (i=1, 3) \\ &\tilde{b}x_2 + \tilde{c} + \tilde{z} = y_2, \quad -\tilde{b}x_2 - \tilde{c} + \tilde{z} > -y_2 \\ &\tilde{b}x_i + \tilde{c} + \tilde{z} > y_i, \quad -\tilde{b}x_i - \tilde{c} + \tilde{z} > -y_i \quad (i=4, \dots, m) \end{aligned}$$

が成立する. 与えられた x_1, x_2, x_3 と十分小さい任意の正数 δ に対して

$$\begin{aligned}
 (55) \quad & \eta x_1^2 + \eta' x_1 + \eta'' = -\delta \\
 & \eta x_2^2 + \eta' x_2 + \eta'' = \delta \\
 & \eta x_3^2 + \eta' x_3 + \eta'' = -\delta
 \end{aligned}$$

という連立方程式を考える。(55)の解 η, η', η'' を求めると,

$$(56) \quad \eta = -\frac{2\delta}{(x_2-x_1)(x_3-x_2)} < 0, \quad \eta' = \frac{2(x_1+x_3)\delta}{(x_2-x_1)(x_3-x_2)}, \quad \eta'' = \frac{\{x_2^2-(x_1+x_3)x_2-x_1x_3\}\delta}{(x_2-x_1)(x_3-x_2)}$$

をえる。(56)の η は(7)と $\delta > 0$ より $\eta < 0$ であり,

$$(57) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \eta = \lim_{\delta \rightarrow 0} \eta' = \lim_{\delta \rightarrow 0} \eta'' = 0$$

である。ここで、次式

$$\begin{aligned}
 (58) \quad & \delta \leq \frac{\tilde{b}x_i + \tilde{c} + \tilde{z} - y_i}{2} \quad (i=1, 3, 4, \dots, m) \\
 & \delta \leq \frac{-\tilde{b}x_i - \tilde{c} + \tilde{z} + y_i}{2} \quad (i=2, 4, \dots, m) \\
 & -\eta x_i^2 - \eta' x_i - \eta'' + \delta \leq \tilde{b}x_i + \tilde{c} + \tilde{z} - y_i \quad (i=4, \dots, m) \\
 & \eta x_i^2 + \eta' x_i + \eta'' + \delta \leq -\tilde{b}x_i - \tilde{c} + \tilde{z} + y_i \quad (i=4, \dots, m)
 \end{aligned}$$

を満たすように δ を定める。(58)の右辺は(54)よりすべて正であるから、(57)に注意すると、(58)を満たすように正の δ を定めることができる。次に、

$$(59) \quad a^0 = \eta < 0, \quad b^0 = \tilde{b} + \eta', \quad c^0 = \tilde{c} + \eta'', \quad z^0 = \tilde{z} - \delta$$

と定めると、(54), (55), (58), (59)より

$$\begin{aligned}
 a^0 x_i^2 + b^0 x_i + c^0 + z^0 &= \eta x_i^2 + \eta' x_i + \eta'' + \tilde{b}x_i + \tilde{c} + \tilde{z} - \delta = \tilde{b}x_i + \tilde{c} + \tilde{z} - 2\delta \geq y_i \quad (i=1, 3) \\
 -a^0 x_i^2 - b^0 x_i - c^0 + z^0 &= -\eta x_i^2 - \eta' x_i - \eta'' - \tilde{b}x_i - \tilde{c} + \tilde{z} - \delta = -\tilde{b}x_i - \tilde{c} + \tilde{z} = -y_i \quad (i=1, 3) \\
 a^0 x_2^2 + b^0 x_2 + c^0 + z^0 &= \eta x_2^2 + \eta' x_2 + \eta'' + \tilde{b}x_2 + \tilde{c} + \tilde{z} - \delta = \tilde{b}x_2 + \tilde{c} + \tilde{z} = y_2 \\
 -a^0 x_2^2 - b^0 x_2 - c^0 + z^0 &= -\eta x_2^2 - \eta' x_2 - \eta'' - \tilde{b}x_2 - \tilde{c} + \tilde{z} - \delta = -\tilde{b}x_2 - \tilde{c} + \tilde{z} - 2\delta \geq -y_2 \\
 a^0 x_i^2 + b^0 x_i + c^0 + z^0 &= \eta x_i^2 + \eta' x_i + \eta'' + \tilde{b}x_i + \tilde{c} + \tilde{z} - \delta \geq y_i \quad (i=4, \dots, m) \\
 -a^0 x_i^2 - b^0 x_i - c^0 + z^0 &= -\eta x_i^2 - \eta' x_i - \eta'' - \tilde{b}x_i - \tilde{c} + \tilde{z} - \delta \geq -y_i \quad (i=4, \dots, m)
 \end{aligned}$$

が成立する。さらに、(58)の最初の2つの式と(59), $\delta > 0$ より

$$\begin{aligned}
 z^0 = \tilde{z} - \delta &> \tilde{z} - 2\delta \geq y_i - (\tilde{b}x_i + \tilde{c}) \quad (i=4, \dots, m) \\
 z^0 = \tilde{z} - \delta &> \tilde{z} - 2\delta \geq -y_i + (\tilde{b}x_i + \tilde{c}) \quad (i=4, \dots, m)
 \end{aligned}$$

であるから、

$$z^0 = \tilde{z} - \delta > |y_i - \tilde{b}x_i - \tilde{c}| \geq 0 \quad (i=4, \dots, m)$$

である。ゆえに、 $z^0 > 0$ である。以上より(59)は制約条件(17)の実行可能解である。このとき、 $\delta > 0$ より $z^0 < \tilde{z}$ である。このことと $\tilde{z}$ の定義より

$$\tilde{z} \leq z^0 < \tilde{z}$$

である。したがって、定理12の(48)が成立し、定理12の(49), すなわち(52)をえる。

(ii)の場合、仮定により

$$\begin{aligned}
 (60) \quad & \tilde{b}x_i + \tilde{c} + \tilde{z} = y_i, \quad -\tilde{b}x_i - \tilde{c} + \tilde{z} > -y_i \quad (i=1, 3) \\
 & \tilde{b}x_2 + \tilde{c} + \tilde{z} > y_2, \quad -\tilde{b}x_2 - \tilde{c} + \tilde{z} = -y_2 \\
 & \tilde{b}x_i + \tilde{c} + \tilde{z} > y_i, \quad -\tilde{b}x_i - \tilde{c} + \tilde{z} > -y_i \quad (i=4, \dots, m)
 \end{aligned}$$

が成立する. 同じく x_1, x_2, x_3 と十分小さい任意の正数 δ に対して

$$(61) \quad \begin{aligned} \eta x_1^2 + \eta' x_1 + \eta'' &= \delta \\ \eta x_2^2 + \eta' x_2 + \eta'' &= -\delta \\ \eta x_3^2 + \eta' x_3 + \eta'' &= \delta \end{aligned}$$

という連立方程式を考える. (61)を満たす η, η', η'' を解くと,

$$(62) \quad \eta = \frac{2\delta}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)} > 0, \quad \eta' = -\frac{2(x_1 + x_3)\delta}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)}, \quad \eta'' = -\frac{\{x_2^2 - (x_1 + x_3)x_2 - x_1x_3\}\delta}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

となり, (62)の η は(7)と $\delta > 0$ より $\eta > 0$ であり, やはり(57)が成立する. このとき, 次式

$$(63) \quad \begin{aligned} \delta &\leq \frac{\tilde{b}x_i + \tilde{c} + \tilde{z} - y_i}{2} \quad (i=2, 4, \dots, m) \\ \delta &\leq \frac{-\tilde{b}x_i - \tilde{c} + \tilde{z} + y_i}{2} \quad (i=1, 3, 4, \dots, m) \\ -\eta x_i^2 - \eta' x_i - \eta'' + \delta &\leq \tilde{b}x_i + \tilde{c} + \tilde{z} - y_i \quad (i=4, \dots, m) \\ \eta x_i^2 + \eta' x_i + \eta'' + \delta &\leq -\tilde{b}x_i - \tilde{c} + \tilde{z} + y_i \quad (i=4, \dots, m) \end{aligned}$$

を満たすように δ を定める. (63)の右辺は(60)によってすべて正であるから, (57)に注意すると, (63)を満たすように正の δ を定めることができる. 次に,

$$(64) \quad a^0 = \eta > 0, \quad b^0 = \tilde{b} + \eta', \quad c^0 = \tilde{c} + \eta'', \quad z^0 = \tilde{z} - \delta$$

と定めると, (60), (61), (63), (64)より

$$\begin{aligned} a^0 x_i^2 + b^0 x_i + c^0 + z^0 &= \eta x_i^2 + \eta' x_i + \eta'' + \tilde{b}x_i + \tilde{c} + \tilde{z} - \delta = \tilde{b}x_i + \tilde{c} + \tilde{z} = y_i \quad (i=1, 3) \\ -a^0 x_i^2 - b^0 x_i - c^0 + z^0 &= -\eta x_i^2 - \eta' x_i - \eta'' - \tilde{b}x_i - \tilde{c} + \tilde{z} - \delta = -\tilde{b}x_i - \tilde{c} + \tilde{z} - 2\delta \leq -y_i \quad (i=1, 3) \\ a^0 x_2^2 + b^0 x_2 + c^0 + z^0 &= \eta x_2^2 + \eta' x_2 + \eta'' + \tilde{b}x_2 + \tilde{c} + \tilde{z} - \delta = \tilde{b}x_2 + \tilde{c} + \tilde{z} - 2\delta \geq y_2 \\ -a^0 x_2^2 - b^0 x_2 - c^0 + z^0 &= -\eta x_2^2 - \eta' x_2 - \eta'' - \tilde{b}x_2 - \tilde{c} + \tilde{z} - \delta = -\tilde{b}x_2 - \tilde{c} + \tilde{z} = -y_2 \\ a^0 x_i^2 + b^0 x_i + c^0 + z^0 &= \eta x_i^2 + \eta' x_i + \eta'' + \tilde{b}x_i + \tilde{c} + \tilde{z} - \delta \geq y_i \quad (i=4, \dots, m) \\ -a^0 x_i^2 - b^0 x_i - c^0 + z^0 &= -\eta x_i^2 - \eta' x_i - \eta'' - \tilde{b}x_i - \tilde{c} + \tilde{z} - \delta \geq -y_i \quad (i=4, \dots, m) \end{aligned}$$

である. また, (63)と $\delta > 0$ より

$$\begin{aligned} z^0 = \tilde{z} - \delta &> \tilde{z} - 2\delta \geq y_i - (\tilde{b}x_i + \tilde{c}) \quad (i=4, \dots, m) \\ z^0 = \tilde{z} - \delta &> \tilde{z} - 2\delta \geq -y_i + \tilde{b}x_i + \tilde{c} \quad (i=4, \dots, m) \end{aligned}$$

であるから,

$$z^0 = \tilde{z} - \delta > |y_i - \tilde{b}x_i - \tilde{c}| \geq 0 \quad (i=4, \dots, m)$$

である. ゆえに, $z^0 > 0$ である. 以上より(64)は制約条件(17)の実行可能解である. このとき, $\delta > 0$ より $z^0 < \tilde{z}$ であり, このことと $\tilde{z}$ の定義により

$$\tilde{z} \leq z^0 < \tilde{z}$$

である. ゆえに, 定理 12 の(48)が成立し, 定理 12 の(50), すなわち(53)をえる.

Q. E. D.

定理 15. (6)と(48)が成立すると仮定する. 3 個の観測値 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ に対して(7)が成立し, (i) (x_1, y_1) と (x_3, y_3) が直線(9)の上に, (x_2, y_2) が直線(10)の上に位置し, これらの直線を決定する $\tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{z}$ が(11)で与えられる場合,

$$(65) \quad x_1 + x_2 \geq 0$$

であるならば,

$$(66) \quad \tilde{\tilde{b}} > \tilde{b}$$

であり,

$$(67) \quad x_2 + x_3 \leq 0$$

であるならば,

$$(68) \quad \tilde{\tilde{b}} < \tilde{b}$$

である. (ii) (x_1, y_1) と (x_3, y_3) が直線(12)の上に, (x_2, y_2) が直線(13)の上に位置し, これらの直線を決定する $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{z}$ が(14)で与えられる場合,

$$(65) \quad x_1 + x_2 \geq 0$$

であるならば,

$$(68) \quad \tilde{\tilde{b}} < \tilde{b}$$

であり,

$$(67) \quad x_2 + x_3 \leq 0$$

であるならば,

$$(66) \quad \tilde{\tilde{b}} > \tilde{b}$$

である.

証明. (i)の場合, 定理 12 の(48)より定理 10 の証明の中の(35), (36)と(37)が強い不等号で成立する. このとき, 定理 12 の(49)すなわち $\tilde{\tilde{a}} < 0$ が成立するから, 強い不等号で成立する(37)において(65)が成立するならば, (66)がえられる. 同様に, この場合定理 10 の証明の中の(38)が強い不等号で成立し, (49)を考慮すると, (67)が成立するならば, (68)が成立する.

(ii)の場合, 定理 12 の(48)より定理 10 の証明の中の(39), (40)と(41)が強い不等号で成立する. このとき, 定理 12 の(50)すなわち $\tilde{\tilde{a}} > 0$ が成立するから, 強い不等号で成立する(41)において(65)が成立するならば, (68)が成立する. 同様に, この場合定理 10 の証明の中の(42)が強い不等号で成立し, (50)に注意すると, (67)が成立するならば, (66)が成立する. Q. E. D.

5. 数値例

本節で Chebyshev 基準による 2 次の回帰曲線の特徴を明らかにするために幾つかの数値例を示す.

例題 1. (6)を満たす観測値を 1 番目から 4 番目まで順に

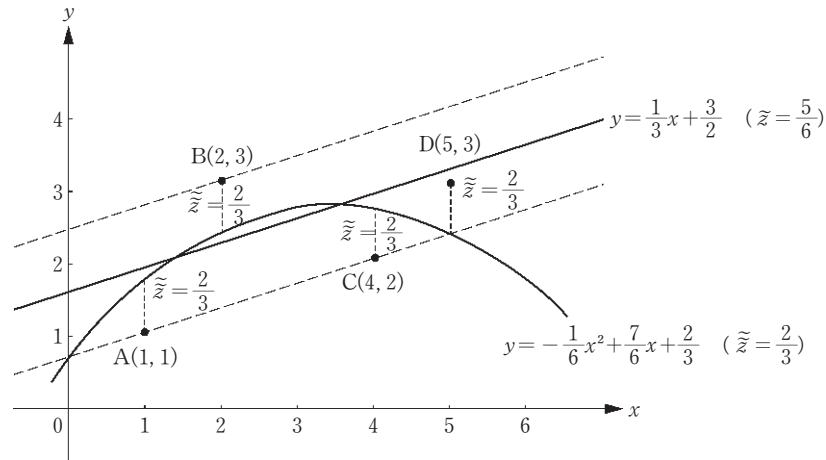
$$A(1, 1), B(2, 3), C(4, 2), D(5, 3)$$

とする.

このとき, Chebyshev 基準による回帰直線と $\tilde{z}$ は, 主問題(2)-(3)を解いて

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{3}{2}, \quad \tilde{z} = \frac{5}{6}$$

となる. この場合, 3 個の観測値 A, B, C が(11)によってこの回帰直線の係数と $\tilde{z}$ を定めている. この回帰直線の上方にあって偏差の絶対値が $\tilde{z}$ に等しい観測値 B の x 座標は, この回帰直線の下方にあって偏差の絶対値が $\tilde{z}$ に等しい 2 つの観測値 A と C の x 座標による开区間の中にあり, この直線



第 3 図

は一意である。

2 次の回帰曲線と $\tilde{z}$ は, 主問題(16)-(17)を解いて

$$y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x + \frac{2}{3}, \quad \tilde{z} = \frac{2}{3}$$

となる(第 3 図を参照)．このとき, 双対問題(18)-(19)の最適解は

$$\tilde{v}_1 = \frac{1}{6}, \quad \tilde{u}_2 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{v}_3 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{u}_4 = \frac{1}{6}$$

(他の双対変数はすべてゼロ)であり, 定理 4 が成立している．(6)が成立しているので, 定理 5 よりこの回帰曲線は一意であり, 定理 7 が示すように正である $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ は交互に並んでおり, 定理 8 が示すように偏差の絶対値が $\tilde{z}$ に等しい 4 個の観測値 A, B, C, D は, この曲線の下方と上方に (x 座標の小さい順に)交互に位置している．定理 9 が示すように

$$\tilde{z} = \frac{2}{3} < \frac{5}{6} = \tilde{z}$$

であり, 定理 12 の(i)と定理 14 の(i)が示すように

$$\tilde{a} = -\frac{1}{6} < 0$$

である．また, これは定理 15 の(i)の場合であり, 観測値 A と B の x 座標の和が正 ($x_1 + x_2 = 1 + 2 > 0$) で, 定理 15 の(i)の(65)が満たされるので, (66)が示すように

$$\tilde{b} = \frac{7}{6} > \frac{1}{3} = \tilde{b}$$

が成立している．

例題 2. (6)を満たす観測値を 1 番目から 4 番目まで順に

$$A(0, 3), B(2, 1), C(3, 4), D(5, 6)$$

とする．

このとき、Chebyshev 基準による回帰直線と $\tilde{z}$ は、主問題(2)-(3)を解いて

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}, \quad \tilde{z} = \frac{4}{3}$$

となる。この場合、最初の3個の観測値が(14)によってこの回帰直線の係数と $\tilde{z}$ を決定している。この回帰直線の下方面にあってその偏差の絶対値が $\tilde{z}$ に等しい観測値 B の x 座標は、この回帰直線の上方面にあってそれらの偏差の絶対値が $\tilde{z}$ に等しい2つの観測値 A と C の x 座標による开区間内にあり、この回帰直線は一意である。2次の回帰曲線と $\tilde{z}$ は、主問題(16)-(17)を解いて

$$y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{11}{6}, \quad \tilde{z} = \frac{7}{6}$$

となる(第4図を参照)。このとき、双対問題(18)-(19)の最適解は、

$$\tilde{u}_1 = \frac{1}{12}, \quad \tilde{v}_2 = \frac{5}{12}, \quad \tilde{u}_3 = \frac{5}{12}, \quad \tilde{v}_4 = \frac{1}{12}$$

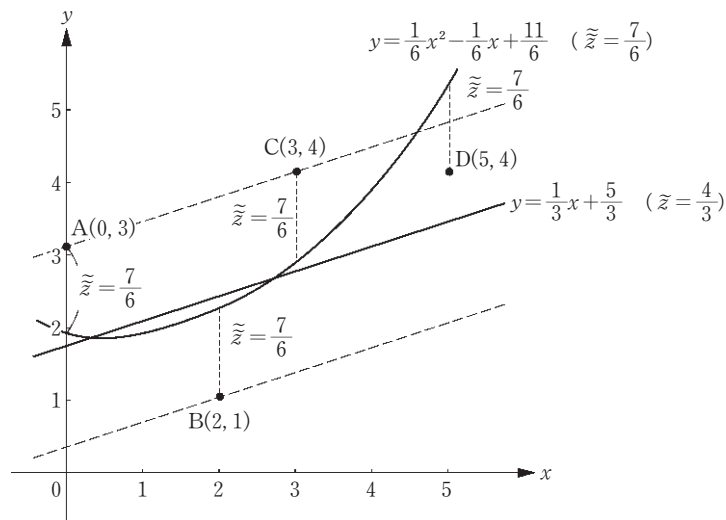
(他の双対変数はすべてゼロ)であり、定理4が成立している。(6)が成立しているので、定理5よりこの回帰曲線も一意である。定理7が示すように正である $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ は交互に並んでおり、定理8が示すように偏差の絶対値が $\tilde{z}$ に等しい4個の観測値 A, B, C, D はこの曲線の上方面と下方面に(x 座標の小さい順に)交互に位置している。定理9が示すように

$$\tilde{z} = \frac{7}{6} < \frac{4}{3} = \tilde{z}$$

であり、定理12(ii)と定理14(ii)が示すように

$$\tilde{a} = \frac{1}{6} > 0$$

である。さらに、観測値 A と B の x 座標の和が正 ($x_1 + x_2 = 0 + 2 > 0$) で、定理15(ii)の(65)が満たされているから、(68)が示すように



第4図

$$\tilde{\tilde{b}} = -\frac{1}{6} < \frac{1}{3} = \tilde{b}$$

が成立している。

例題 3. (6)を満たす観測値を 1 番目から 4 番目まで順に

$$A(1, 1), B(2, 3), C(4, 2), D(5, 4)$$

とする。

この例では最初の 3 個の観測値 A, B, C が(11)を満たし, 4 番目の観測値 D が定理 13 の条件を満たすから, 定理 13 より定理 11 の(43)が成立し, したがって, (44)が成立することがわかる。実際, 主問題(2)-(3)と(16)-(17)を解くと,

$$\tilde{a} = 0, \quad \tilde{b} = \tilde{\tilde{b}} = \frac{1}{3}, \quad \tilde{c} = \tilde{\tilde{c}} = \frac{3}{2}, \quad \tilde{z} = \tilde{\tilde{z}} = \frac{5}{6}$$

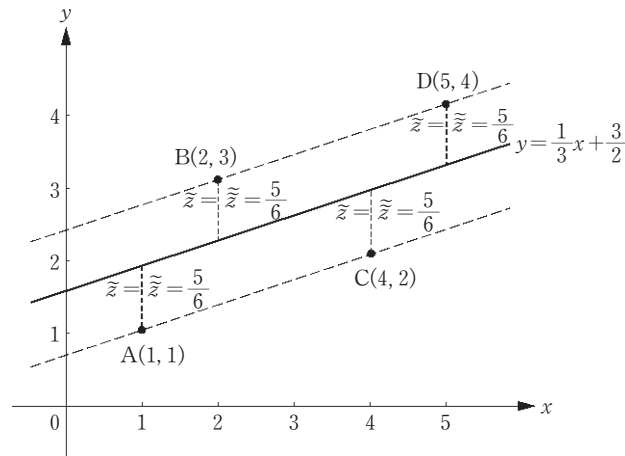
となって, 2 次の回帰曲線は回帰直線

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{3}{2}$$

に退化し, これは一意である(第 5 図を参照)。このとき, 双対問題(18)-(19)の最適解は

$$\tilde{v}_1 = \frac{1}{6}, \quad \tilde{u}_2 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{v}_3 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{u}_4 = \frac{1}{6}$$

であり, 定理 7 と定理 8 が成り立っている。



第 5 図

例題 4. 観測値を 1 番目から 4 番目まで順に

$$A(1, 1), B(1, 3), C(4, 0), D(5, 2)$$

とする。最初の 2 つの観測値の x 座標が等しいので, この例では(6)は満たされていない。

このとき, Chebyshev 基準による回帰直線と $\tilde{z}$ は,

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{17}{8}, \quad \tilde{z} = \frac{9}{8}$$

であり, この回帰直線は一意である. 2 次の回帰曲線は多重解で, 最適な端点解に対応する回帰曲線と $\tilde{z}$ は,

$$(69) \quad y = \frac{7}{12}x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{14}{3}, \quad \tilde{z} = 1$$

$$(70) \quad y = \frac{5}{4}x^2 - \frac{29}{4}x + 8, \quad \tilde{z} = 1$$

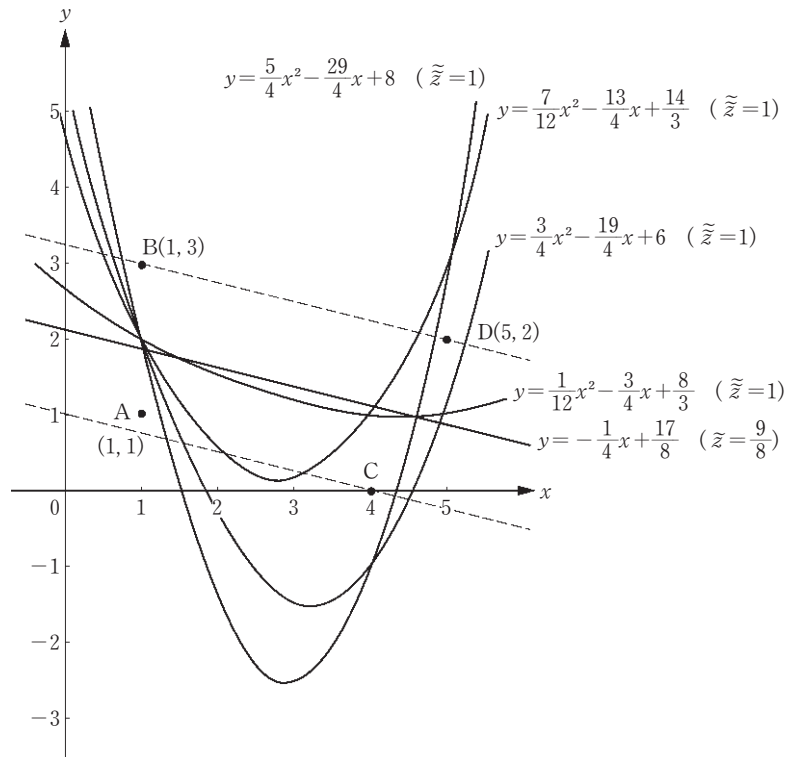
$$(71) \quad y = \frac{3}{4}x^2 - \frac{19}{4}x + 6, \quad \tilde{z} = 1$$

$$(72) \quad y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{8}{3}, \quad \tilde{z} = 1$$

であり, 定理 6 が成立している (第 6 図を参照). また, これらの凸結合も最適な回帰曲線となる. (69) は点 (1, 2), (4, 1), (5, 3) を, (70) は点 (1, 2), (4, -1), (5, 3) を, (71) は点 (1, 2), (4, -1), (5, 1) を, (72) は点 (1, 2), (4, 1), (5, 1) を通る. この場合, このようにすべての回帰曲線は x 座標の等しい観測値 A と B の中点 (1, 2) を通る. 双対問題の最適解は

$$\tilde{v}_1 = \tilde{u}_2 = \frac{1}{2}$$

(他の双対変数はすべてゼロ) で, 退化している.



第 6 図

参考文献

- [1] Appa, G., and Smith, C., "On L_1 and Chebyshev Estimation," *Mathematical Programming*, Vol. 5 (1973), pp. 73-87.
- [2] Chvátal, V., *Linear Programming*. New York : W. H. Freeman and Co., 1983.
- [3] Collatz, L., and Wetterling, W., *Optimization Problems*. New York : Springer-Verlag, 1975.
- [4] Cooper, L., and Steinberg, D., *Methods and Applications of Linear Programming*. Philadelphia, Pa. : W. B. Saunders Co., 1974.
- [5] Gale, D., *The Theory of Linear Economic Models*. New York : McGraw-Hill Book Co., 1960.
- [6] Gass, S. I., *Linear Programming : Methods and Applications*. Fifth Edition, New York : McGraw-Hill Book Co., 1985.
- [7] Hadley, G., *Linear Programming*. Reading, Mass. : Addison-Wesley Publishing Co., 1962.
- [8] Harter, H. L., "The Method of Least Squares and Some Alternatives—Part I," *International Statistical Review*, Vol. 42 (1974), pp. 147-174.
- [9] Hastings, C., Jr., *Approximation for Digital Computers*. Princeton, N. J. : Princeton University Press, 1955.
- [10] Kelley, J. E., Jr., "An Application of Linear Programming to Curve Fitting," *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 6 (1958), pp. 15-22.
- [11] Krekó, B., *Linear Programming*. London : Sir Isaac Pitman & Sons, 1968.
- [12] Murty, K. G., *Linear Programming*. New York : John Wiley & Sons, 1983.
- [13] 尾崎雄一郎, 「Chebyshev 基準による回帰直線の特徴づけ定理」, 『名城論叢』, 第 2 巻, 第 4 号(2002 年), pp. 21-33.
- [14] 尾崎雄一郎, 「Chebyshev 基準による原点を通る回帰直線とリニア・プログラミング」, 『名城論叢』, 第 3 巻, 第 1 号(2002 年), pp. 1-10.
- [15] 尾崎雄一郎, 「Chebyshev 基準による回帰直線の幾何学的導出方法」, 『名城論叢』, 第 3 巻, 第 3 号(2002 年), pp. 1-8.
- [16] 尾崎雄一郎, 「Chebyshev 基準による原点を通る回帰直線の特徴づけ定理」, 『名城論叢』, 第 3 巻, 第 4 号(2003 年), pp. 59-71.
- [17] Wagner, H. M., "Linear Programming Techniques for Regression Analysis," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 54 (1959), pp. 206-212.