

符号の制約のない変数をもつリニア・プログラミングの問題を解く新しい方法

尾 崎 雄一郎

1. はじめに

リニア・プログラミングによって回帰直線や過剰決定の連立方程式の近似解を求める問題、2 人ゼロ和ゲームを解く問題等には負の値をとりうる変数が存在する。リニア・プログラミングの問題をシンプレックス法や双対シンプレックス法などを用いて解く場合には、変数はすべて非負でなければならないから、これらの問題を実際に解こうとするときには、すべての変数が非負になるように、新しい変数を導入するなどの工夫をして問題を変換しなければならない。

このように符号の制約のない変数(これを自由変数と呼ぶこともある)をもつ問題を取り扱う方法は、Gale, Kuhn, and Tucker ([5], p. 328)によって極めて早い時期に示され、今なお主要な方法として用いられている。これは符号の制約のない変数たとえば x_j を 2 個の非負の変数 x_j' と x_j'' の差として、

$$x_j = x_j' - x_j'', x_j' \geq 0, x_j'' \geq 0$$

と表す方法である(Bertsimas and Tsitsiklis [2], p. 5, Dantzig [3], p. 86, Gass [6], pp. 40-41, 395-400, Gaver and Thompson [8], p. 167, Hadley [9], pp. 168-170, Hillier and Lieberman [10], pp. 73-74, Ignizio and Cavalier [11], pp. 112-114, Murty [12], p. 54, Wagner [14], p. 76 など参照)。これは絶対値をもつ符号の制約のない変数を取り扱うときには今でも欠かせない有力な方法である。これを少し変更した方法に、たとえば符号の制約のない 2 つの変数 x_j, x_h をそれぞれ共通の非負の変数 x_0 を用いて

$$x_j = x_j' - x_0, x_h = x_h' - x_0, x_j' \geq 0, x_h' \geq 0, x_0 \geq 0$$

と表す方法が Deutsch [4] によって、また A. W. Tucker のアイディアとして Dantzig ([3], p. 86) に示されている(Gass [6], p. 60, Gaver and Thompson [8], pp. 171-175, Wagner [14], p. 77 など参照)。これとは別に Gass [7] は非負性の制約のない変数をもつリニア・プログラミングの問題の基底解が最適であるための条件について考察している。Rivlin ([13], p. 78)は最小絶対値法による回帰直線を求めるとき、符号の制約のない変数を異なったやり方で取り扱っているが、これは結局は Deutsch などによる方法と同じになる。

この論文の目的は、変数の数を増加させることなく、パラメーターを 1 個導入するだけで、非負性の制約のない変数を同時に何個でも取り扱うことができる新しい簡単な方法を提案することにある。最初に、回帰直線をリニア・プログラミングを用いて求める問題にこの方法を適用し、そのときの変換の幾何学的な意味を明らかにする。また、一般のリニア・プログラミングの問題にこの方法を適用するとき、実行可能解の領域がどのように変化するかを数値例で明らかにする。さらに、この方法を 2 人ゼロ和ゲームの問題に適用するときに限っては、従来の 2 人ゼロ和ゲームの問題の非負性の制約のない変数を処理する方法と結果的に同じになることを示す。しかし、従来の方

法はパラメーターの変換であり、我々の方法はパラメーターを導入した変数の変換であって考え方に基本的な違いがある。我々の方法は変数の数を増加させないので、符号の制約のない変数の数が多いときには特に有効である。

2. 回帰直線を求める問題への新しい方法の適用

独立変数 x と従属変数 y に関する m 個の観測データ

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$$

が与えられているとき、偏差の絶対値の和を最小にする最小絶対値法によって回帰直線

$$(1) \quad y = ax + b$$

の傾き a と定数項 b を決定する問題を考える（以下に述べる方法はより高次の多項式の場合にも、Chebyshev 基準によって回帰直線を決定する場合にも適用できる）。回帰直線 (1) と i 番目の観測値との偏差 e_i を

$$(2) \quad e_i = y_i - (ax_i + b) \quad (i=1, \dots, m)$$

と定義する。(2)の偏差 e_i と a, b には符号の制約がない。また、観測値の数 m は2個よりも多く、 $m > 2$ であるとする。

最小絶対値法では、偏差の L_1 ノルムである

$$\sum_{i=1}^m |e_i|$$

を最小にするように回帰直線(1)の a と b を決定する。このとき、

$$(3) \quad e_i = e_i' - e_i'', e_i' \geq 0, e_i'' \geq 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

とすると、 e_i' か e_i'' の少なくとも1つはゼロにできるので、

$$|e_i| = |e_i' - e_i''| = e_i' + e_i'' \quad (i=1, \dots, m)$$

と表すことができる。したがって、最小絶対値法による a と b は、

$$(4) \quad \sum_{i=1}^m (e_i' + e_i'')$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$(5) \quad ax_i + b + e_i' - e_i'' = y_i, e_i' \geq 0, e_i'' \geq 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

というリニアール・プログラミングの最適解としてえられる。ここで、変数 a と b には符号の制約がない。

いま、十分に大きい正数 M を任意に選んで、

$$(6) \quad a' = a + M \geq 0, b' = b + M \geq 0$$

が成立するように新しい変数 a' と b' を定義する。(6)より a と b を求めて(5)に代入すると、問題(4)-(5)は

$$(7) \quad \sum_{i=1}^m (e_i' + e_i'')$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$(8) \quad \begin{aligned} a'x_i + b' + e_i' - e_i'' &= y_i + (1+x_i)M & (i=1, \dots, m) \\ a' \geq 0, b' \geq 0, e_i' \geq 0, e_i'' \geq 0 & & (i=1, \dots, m) \end{aligned}$$

と表せる。問題(4)-(5)には符号の制約のない変数が存在したが、問題(7)-(8)では変数を増やすことなく、パラメーター M を 1 つ増やすだけで、すべての変数が非負になっている。(2)の e_i にも符号の制約がないが、目的関数における絶対値の記号をはずし、(4)のように表すためには、(3)のようにするのがよい。

(2)と(6)よりすべての i に対して

$$e_i = y_i - (ax_i + b) = y_i - (a'x_i + b') + (1+x_i)M$$

が成立するから、問題(4)-(5)を問題(7)-(8)のように変換しても偏差は全く変わらない。また、(1)のような直線を求める場合には、制約条件(5)と(8)を比較してみればわかるように、 i 番目の観測値は、

$$(9) \quad (x_i, y_i) \longrightarrow (x_i, y_i + (1+x_i)M) \quad (i=1, \dots, m)$$

のように観測値の y 座標のみが変換される。ゆえに、観測値の y 座標は $x_i < -1$ のとき元の位置より下方に、 $x_i = -1$ のとき元の位置のままで、 $x_i > -1$ のとき元の位置より上方へ、(9)に従って変換される。

主問題(7)-(8)の双対問題は、

$$(10) \quad \sum_{i=1}^m y_i u_i$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$(11) \quad \sum_{i=1}^m x_i u_i = 0, \sum_{i=1}^m u_i = 0, -1 \leq u_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, m)$$

と表される。制約条件(11)を用いると、

$$\sum_{i=1}^m \{y_i + (1+x_i)M\} u_i = \sum_{i=1}^m y_i u_i$$

となるから、目的関数(10)は、(6)のように変数を変換する前の双対問題の表現と全く同じである。

次に、数値例で最小絶対値法による回帰直線を求め、新しい方法の変換の意味をみてみよう。

例題 1. 4 個の観測値を 1 番目から 4 番目まで順に

$$A(-3, 5), B(-1, 1), C(1, 2), D(2, 0)$$

とする(第 1 図参照)。

このとき、最小絶対値法によって回帰直線

$$y = ax + b$$

の係数 a と b を求める。偏差 e_i を

$$e_i = y_i - (ax_i + b) \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

とし、

$$e_i = e'_i - e''_i, e'_i \geq 0, e''_i \geq 0 \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

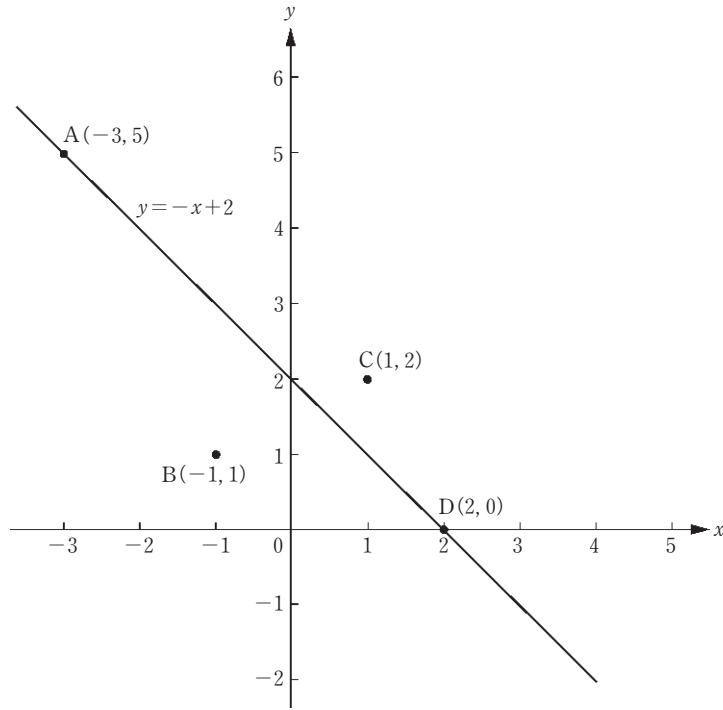
とする。さらに、非常に大きい正数 M を用いて

$$a' = a + M \geq 0, b' = b + M \geq 0$$

が成立するようにする。これらより最小絶対値法による回帰直線の係数は、

$$\sum_{i=1}^4 (e'_i + e''_i)$$

を次の制約条件の下で最小にする



第1図

$$-3a' + b' + e_1' - e_1'' = -2M + 5$$

$$-a' + b' + e_2' - e_2'' = 1$$

$$a' + b' + e_3' - e_3'' = 2M + 2$$

$$2a' + b' + e_4' - e_4'' = 3M$$

$$a' \geq 0, b' \geq 0, e_i' \geq 0, e_i'' \geq 0 \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

という問題の最適解としてえられる。この制約条件より変換された観測値は、

$$A'(-3, -2M+5), B'(-1, 1), C'(1, 2M+2), D'(2, 3M)$$

となるから、点 A' は元の点 A より下方へ、点 B' は点 B と同じで、点 C' と D' は元の点 C と D より上方へ変換される。この問題をパラメトリック・プログラミングの問題として解くと、最適解は

$$a' = M-1, b' = M+2, e_2'' = 2, e_3' = 1$$

(他の変数はすべてゼロ)となる。したがって、新しい方法で変換した問題の回帰直線は、

$$y = (M-1)x + M+2$$

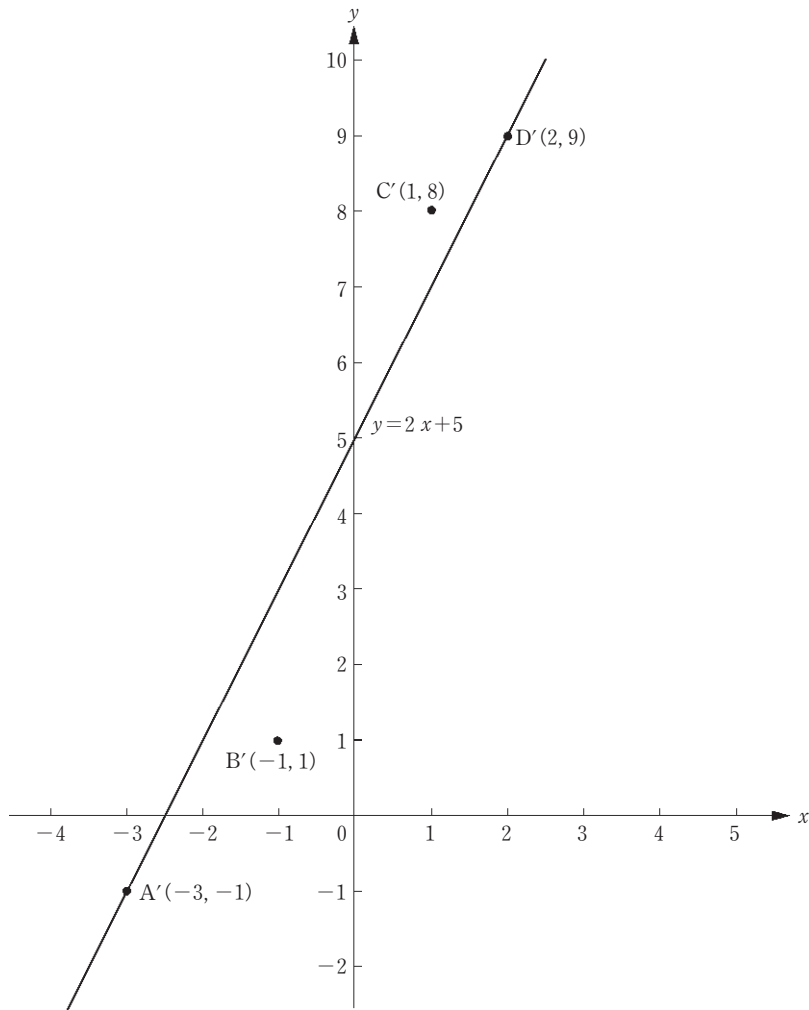
となる。このとき、たとえば $M=3$ として観測値と回帰直線を描いたのが第2図である。元の問題の最適解は

$$a = -1, b = 2, e_1 = 0, e_2 = -2, e_3 = 1, e_4 = 0$$

となり、求める回帰直線は、第1図における

$$y = -x + 2$$

となる。



第 2 図

3. 一般的なりニア・プログラミングの問題への新しい方法の適用

本節で、

$$(12) \quad f = \sum_{j=1}^k c_j x_j + \sum_{j=k+1}^n c_j x_j$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$(13) \quad \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j + \sum_{j=k+1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1, \dots, m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=k+1, \dots, n)$$

という変数 $x_j (j=1, \dots, k)$ に符号の制約のない一般的なりニア・プログラミングの問題に対する新しい方法の適用を考える。ここで f は目的関数の値で、 k は $1 \leq k \leq n$ である任意の整数とする。

このとき、十分大きい任意の正数 M を用いて

$$(14) \quad x_j' = x_j + M \geq 0 \quad (j=1, \dots, k)$$

が成立するように新しい変数 x_j' を定義する。(14)から x_j を求め、それを代入することによって符号の制約のない変数をもつ問題(12)-(13)は、

$$(15) \quad f = \sum_{j=1}^k c_j x_j' + \sum_{j=k+1}^n c_j x_j - M \sum_{j=1}^k c_j$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$(16) \quad \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j' + \sum_{j=k+1}^n a_{ij} x_j \leq M \sum_{j=1}^k a_{ij} + b_i \quad (i=1, \dots, m)$$

$$x_j' \geq 0 \quad (j=1, \dots, k), \quad x_j \geq 0 \quad (j=k+1, \dots, n)$$

というすべての変数が非負である問題として表される。

符号の制約のない変数をもつ次の数値例を新しい方法で解いてみる。

例題 2 .

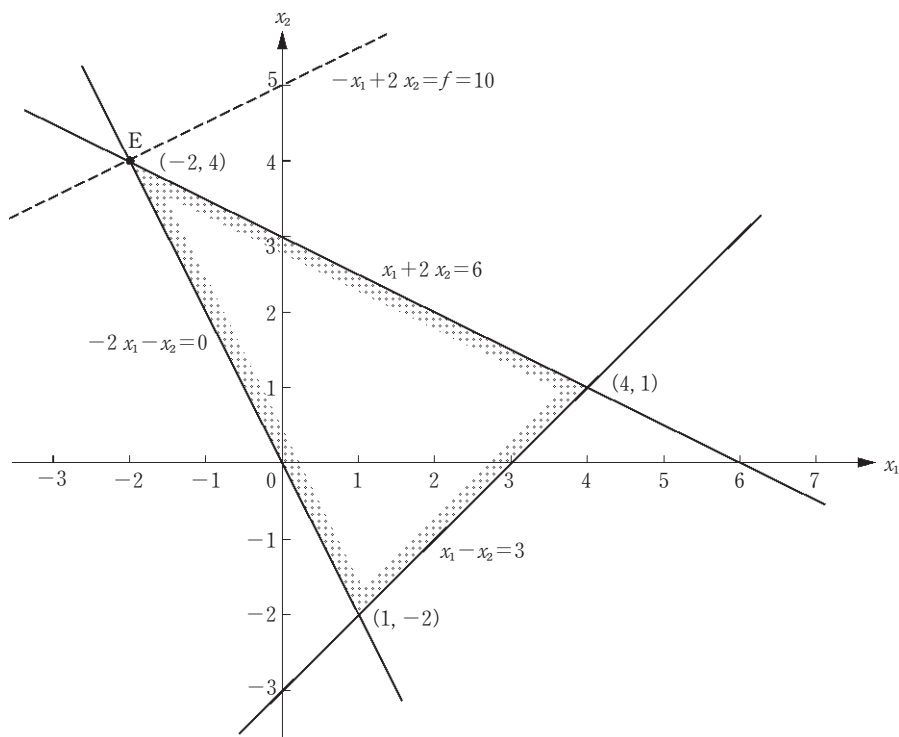
$$f = -x_1 + 2x_2$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$x_1 - x_2 \leq 3$$

$$-2x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$



第 3 図

という変数 x_1 と x_2 に非負性の条件がない問題を考える。この問題の実行可能解の領域は第 3 図の斜線の部分で示される (最適解は点 E である)。

十分大きい任意の正数 M を用いて

$$x_1' = x_1 + M \geq 0, x_2' = x_2 + M \geq 0$$

が成立するようにする。これらの x_1' と x_2' を用いると、先の問題は

$$f = -x_1' + 2x_2' - M$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$x_1' - x_2' \leq 3$$

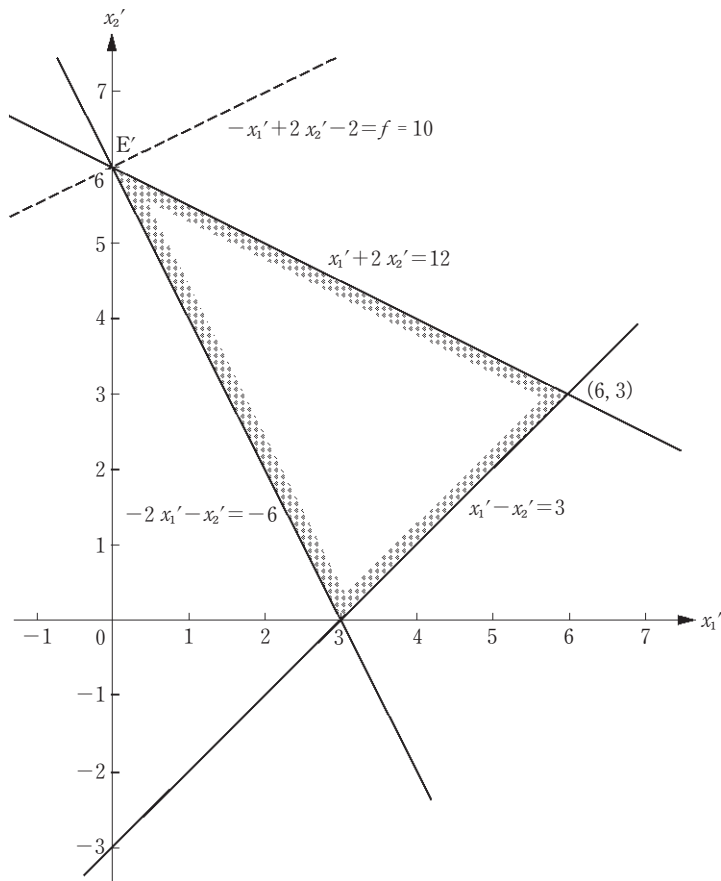
$$-2x_1' - x_2' \leq -3M$$

$$x_1' + 2x_2' \leq 3M + 6$$

$$x_1' \geq 0, x_2' \geq 0$$

というすべての変数が非負である問題に変換される。この変換された問題をパラメトリック・プログラミングの問題として解くと、

$$x_1' = M - 2, x_2' = M + 4, f = 10$$



第 4 図

をえる。これより元の問題の最適解と目的関数の最大値は

$$x_1 = -2, x_2 = 4, f = 10$$

となる。変換した問題を $M=2$ として描くと実行可能解の領域は、第4図の斜線の部分で表され、すべて非負となり、最適解は点 E' で示される。

4. 2人ゼロ和ゲームへの新しい方法の適用

利得行列が

$$(17) \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

で与えられる2人ゼロ和ゲームを考える。このとき、最大化プレイヤーの i 番目の戦略に対する賭目の比率を x_i とし、ゲームの値を v とすると、最大化プレイヤーの最適戦略とゲームの値は、

$$(18) \quad v$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$(19) \quad \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i \geq v \quad (j=1, \dots, n), \sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad x_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

という符号の制約のない変数 v をもつリニアール・プログラミングの問題の最適解としてえられる。

最小化プレイヤーの j 番目の戦略に対する賭目の比率を y_j とすると、最小化プレイヤーの最適戦略は、

$$(20) \quad v$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$(21) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \leq v \quad (i=1, \dots, m), \sum_{j=1}^n y_j = 1, \quad y_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n)$$

というやはり符号の制約のない問題の最適解としてえられる。問題(20)-(21)は問題(18)-(19)の双対問題である。

符号の制約のない変数をもつリニアール・プログラミングの問題(18)-(19)とその双対問題(20)-(21)として表された2人ゼロ和ゲームの問題を解く従来の方法では、ゲームの値 v を2つの非負の変数の差として表すということをせずに(そのようにしても解くことができる)、利得行列(17)の各々の要素に十分大きい任意の正数 M を加えて

$$(22) \quad a_{ij} + M \geq 0 \quad (i=1, \dots, m, j=1, \dots, n)$$

が成立するように新しい利得行列

$$(23) \quad \begin{bmatrix} a_{11} + M & a_{12} + M & \cdots & a_{1n} + M \\ a_{21} + M & a_{22} + M & \cdots & a_{2n} + M \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + M & a_{m2} + M & \cdots & a_{mn} + M \end{bmatrix}$$

を作り、利得行列(23)に対する2人のプレイヤーの最適戦略は元の利得行列(17)に対する最適戦略と同

じで, 新しいゲームの値 v' は非負になり, 元のゲームの値 v との間には $v = v' - M$ という関係があるという事実を用いる. 以上より利得行列(23)に対する最大化プレイヤーの最適戦略とゲームの値は,

$$(24) \quad v'$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$(25) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^m (a_{ij} + M)x_i &\geq v' \quad (j=1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_i &= 1, \quad x_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, m), \quad v' \geq 0 \end{aligned}$$

となり, 最小化プレイヤーの最適戦略とゲームの値は,

$$(26) \quad v'$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$(27) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^n (a_{ij} + M)y_j &\leq v' \quad (i=1, \dots, m) \\ \sum_{j=1}^n y_j &= 1, \quad y_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n), \quad v' \geq 0 \end{aligned}$$

と書き表される (以上の変換については, たとえば Berge and Ghouila-Houri [1], pp. 107-108, Dantzig [3], p. 288, Gass [6], pp. 411-412, Hadley [9], pp. 415-416, Hillier and Lieberman [10], pp. 291-294などを参照).

この論文の新しい方法で利得行列(17)に対するゲームを解くには, 十分大きい正数 M を用いて

$$(28) \quad v' = v + M \geq 0$$

となるような新しい非負の変数 v' を導入する. (28)を用いて最大化プレイヤーに対する問題(18)-(19)は,

$$(29) \quad v' - M$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$(30) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i &\geq v' - M \quad (j=1, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^m x_i &= 1, \quad x_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, m), \quad v' \geq 0 \end{aligned}$$

というすべての変数が非負である問題に変換できる. なお問題(29)-(30)は, M がパラメーターであることと $\sum x_i = 1$ に注意すると, 従来の方で求めた問題(24)-(25)に書き直すことができる. 同様に, 最小化プレイヤーに対する問題(20)-(21)は, (28)を用いると,

$$(31) \quad v' - M$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$(32) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j &\leq v' - M \\ \sum_{j=1}^n y_j &= 1, \quad y_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n), \quad v' \geq 0 \end{aligned}$$

というすべての変数が非負である問題に変換できる. やはり問題(31)-(32)は, $\sum y_j = 1$ に注意すると, 従来の方による問題(26)-(27)に書き直すことができる.

2人ゼロ和ゲームの問題を解く場合に限って, 問題(18)-(19)と問題(20)-(21)を従来の方で変換しても, この論文の新しい方法で変換しても, 各々同じ問題(24)-(25)と問題(26)-(27)をえることができる. しかし, 従来の方では符号の制約のない2人ゼロ和ゲームの問題を解くときには, 新しい利得を(22)のよう

に変換して利得行列を(23)のようにし、すべての変数が非負であるようなリニア・プログラミングの問題として解くことができたが、これは利得というパラメーターの変換である。この方法を用いて符号の制約のない一般のリニア・プログラミングの問題を解くことはできない。この論文の方法はパラメーターの変換ではなく、(6)とか(14)、あるいは(28)のような変数の変換であり、変換の考え方が全く異なり、どのようなリニア・プログラミングの問題にも適用できる汎用性がある。

参考文献

- [1] Berge, C., and Ghouila-Houri, A., *Programming, Games and Transportation Networks*. London: Methuen and Co., 1965.
- [2] Bertsimas, D., and Tsitsiklis, J. N., *Introduction to Linear Optimization*. Belmont, Mass.: Athena Scientific, 1997.
- [3] Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1963.
- [4] Deutsch, M. L., "Letter to the Editor," *Communications of the ACM*, Vol. 2 (1951), p. 1.
- [5] Gale, D., Kuhn, H. W., and Tucker, A. W., "Linear Programming and the Theory of Games," in T. C. Koopmans (Ed.), *Activity Analysis and Allocation*. New York: John Wiley & Sons, 1951, pp. 317-329.
- [6] Gass, S. I., *Linear Programming: Methods and Applications*. Fifth Edition, New York: McGraw-Hill Book Co., 1985.
- [7] Gass, S. I., "On the Solution of Linear-Programming Problems with Free (Unrestricted) Variables," *Computers and Operations Research*, Vol. 12 (1985), pp. 265-271.
- [8] Gaver, D. P., and Thompson, G. L., *Programming and Probability Models in Operations Research*. Monterey, Calif.: Brooks/Cole Publishing Co., 1973.
- [9] Hadley, G., *Linear Programming*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1962.
- [10] Hillier, F. S., and Lieberman, G. J., *Operations Research*. Second Edition, San Francisco, Calif.: Holden-Day, 1974.
- [11] Ignizio, J. P., and Cavalier, T. M., *Linear Programming*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1994.
- [12] Murty, K. G., *Linear Programming*. New York: John Wiley & Sons, 1983.
- [13] Rivlin, T. J., *An Introduction to the Approximation of Functions*. New York: Dover Publications, 1981.
- [14] Wagner, H. M., *Principles of Operations Research*. Second Edition, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1975.