

Chebyshev 基準による原点を通る 回帰直線の特徴づけ定理

尾 崎 雄一郎

1. はじめに

偏差の絶対値の最大値を最小にする Chebyshev 基準 (ミニマックス法) による回帰直線を求める非線形計画法の問題が Kelly [9] によって, 続いて Wagner [15] によってリニア・プログラミングの問題に変換できることが示された. Appa and Smith [1] はこの方法による回帰平面がもつ若干の特徴を明らかにし, Farebrother [5] はこの方法の歴史的発展を辿るとともに, この方法による回帰直線を図によって求める間接的な方法を示した. 尾崎 [12] は Chebyshev 基準による定数項をもつ一般的な回帰直線の多くの特徴をリニア・プログラミングを用いて証明し, 尾崎 [14] はこの回帰直線を幾何学的に求める直接的で, 簡単な方法を提案した.

データの平均とかある特定の点を通る回帰直線は, 各々の観測値の座標から平均あるいはその特定の点の座標を引くことによって原点を通る回帰直線として取り扱うことができる. 定数項をもつ回帰直線と原点を通る回帰直線とはそれらの特徴づける条件が異なる. 尾崎 [13] は Chebyshev 基準による原点を通る回帰直線を求める一般的な式を見出し, それに基づいて原点を通るこの回帰直線がもつ若干の特徴を明らかにした. 本論文の目的は Chebyshev 基準による原点を通る回帰直線がもつ特徴をさらに別の観点から明らかにすることにある.

2. Chebyshev 基準による原点を通る回帰直線

独立変数を x , 従属変数を y とし, これらに関する m 個の観測値

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$$

が与えられ, 観測値の数 m は $m \geq 2$ であるとし, $m=2$ である場合には原点と 2 個の観測値が, また $m \geq 3$ である場合にはすべての観測値が同一直線上に並ぶことはないと仮定する. このようなデータに対して原点を通る回帰直線

$$(1) \quad y = ax$$

の傾き a を Chebyshev 基準によって求める問題を考える.

直線(1)と i 番目の観測値との偏差 e_i を

$$(2) \quad e_i = y_i - ax_i \quad (i=1, \dots, m)$$

とする. Chebyshev 基準による回帰直線の傾き a は, $\max_{i=1, \dots, m} |e_i|$ を最小にすることによって求められる. いま,

$$(3) \quad z = \max_{i=1, \dots, m} |e_i|$$

とすると, (2)と(3)より

$$z \geq |e_i| = |y_i - ax_i| \geq 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

が成立するから、(1)の係数 a を Chebyshev 基準によって求める非線形計画法の問題は、

$$(4) \quad z$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$(5) \quad ax_i + z \geq y_i, \quad -ax_i + z \geq -y_i, \quad z \geq 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

というリニアール・プログラミングの問題になる。この双対問題は、

$$(6) \quad \sum_{i=1}^m y_i (u_i - v_i)$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$(7) \quad \sum_{i=1}^m x_i (u_i - v_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^m (u_i + v_i) \leq 1, \quad u_i \geq 0, \quad v_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

と表される。

3. 特徴づけ定理

本節で

$$(8) \quad x_i \neq 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

という仮定の下で Chebyshev 基準による原点を通る回帰直線がもつ幾つかの特徴を明らかにする。以後、主問題(4)-(5)の最適解を $\tilde{a}$, $\tilde{z}$, 双対問題(6)-(7)の最適解を $\tilde{u}_i$, $\tilde{v}_i$ ($i=1, \dots, m$) と表す。

定理 1. 主問題(4)-(5)とその双対問題(6)-(7)に最適解が存在し、主問題の目的関数(4)の最小値は

$$(9) \quad \tilde{z} > 0$$

である。

証明. 最初に、 $a^0=0$, $z^0=\max_{i=1,\dots,m} (y_i, -y_i)$ とすると、仮定によりすべての y_i がゼロとなることはないから、 $z^0>0$ であり、 a^0 と z^0 は主問題の制約条件(5)を満たす。また、 $u_i^0=v_i^0=0$ ($i=1, \dots, m$) とすると、これらの u_i^0 と v_i^0 は双対問題の制約条件(7)を満たす。主問題と双対問題の各々に実行可能解が存在するので、双対定理の 1 つ (Collatz and Wetterling [3], p.93, Cooper and Steinberg [4], p.171, Gale [6], pp.78-82, Gass [7], p.162, Krekó [10], pp.194-195 など) によって主問題と双対問題の各々に最適解が存在する。

次に、もし $\tilde{z}=0$ であるならば、(5)よりすべての i について $\tilde{a}x_i \geq y_i$, $-\tilde{a}x_i \geq -y_i$ となり、これらより $\tilde{a}x_i = y_i$ ($i=1, \dots, m$) となるが、これはすべての観測値が同一直線上に並ぶことはないという仮定に矛盾する。したがって、(9)が成立する。 Q. E. D.

定理 2. 双対問題の最適解において

$$(10) \quad \tilde{u}_i \tilde{v}_i = 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

が成立する。

証明. (10)に反してある番号 j に対して $\tilde{u}_j > 0$, $\tilde{v}_j > 0$ であるとする、相補弛緩定理(Chvátal [2], pp.62-64, Collatz and Wetterling [3], pp.92-93, Cooper and Steinberg [4], pp.174-175,

Gale [6], pp.19-20, Gass [7], pp.168-170, Hadly [8], pp.239-241, Krekó [10], p.196, Murty [11], pp.197-198 など) によって主問題の最適解に対して

$$\tilde{a}x_j + \tilde{z} = y_j, \quad -\tilde{a}x_j + \tilde{z} = -y_j$$

が成立する. これらより $\tilde{z}=0$ をえるが, これは定理 1 の(9)に矛盾する. したがって, (10)が成立する.

Q. E. D.

定理 3. (8)が成立するならば, Chebyshev 基準による回帰直線(1)は一意である.

証明. いま, $\tilde{w}_i = \tilde{u}_i - \tilde{v}_i$ ($i=1, \dots, m$) とする. このとき, すべての $\tilde{w}_i$ がゼロであるとする, 双対問題の目的関数(6)の最大値はゼロになり, 双対定理の 1 つ (Chvátal [2], pp.58-59, 141-143, Collatz and Wetterling [3], pp.90-92, Cooper and Steinberg [4], pp.163-164, Gass [7], pp.158-161, Hadley [8], pp.229-230, Krekó [10], pp.193-194, Murty [11], p.192 など) によって, 主問題の最小値はゼロになる. しかし, これは定理 1 の(9)に矛盾する. ゆえに, すべての $\tilde{w}_i$ がゼロとなることはない. 次に, $m-1$ 個の $\tilde{w}_i$ がゼロであるとし, 簡単化のために $\tilde{w}_i=0$ ($i=2, \dots, m$) とすると, (7)より $x_1\tilde{w}_1=0$ となるが, (8)より $\tilde{w}_1=0$ となり, 結局すべての $\tilde{w}_i$ がゼロとなって先の結果と同じになる. したがって, $m-2$ 個以下の $\tilde{w}_i$ がゼロでなければならず, これより 2 個以上の $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ が正でなければならない. (7)には変数の非負性の条件を除いて 2 本の制約式があり, 最適な基底解は丁度 2 個の $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ が正でなければならない (Gale [6], p.84, Hadley [8], pp.100-103, Murty [11], p.123 など). 定理 2 の(10)に注意すると, 同じ番号の $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ とが同時に正となることはなく, 双対問題の最適解は退化せず, 主問題(4)-(5)の最適解は一意である (Chvátal [2], p.65, Krekó [10], p.195, Murty [11], p.140 など).

Q. E. D.

以下において y_i が最小である観測値の番号の集合を M_1 , y_i が最大である番号の集合を M_2 , これら以外の番号の集合を M_3 , すなわち

$$(11) \quad M_1 = \{i \mid \min y_i\}, \quad M_2 = \{i \mid \max y_i\}, \quad M_3 = \{i \mid i \in M_1, i \in M_2\}$$

とする. (11)の定義とすべての観測値が同じ直線上に並ぶことはないという仮定より

$$(12) \quad M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \{1, \dots, m\}, \quad M_1 \cap M_2 = \emptyset, \quad M_1 \neq \emptyset, \quad M_2 \neq \emptyset$$

であり, $M_3 = \emptyset$ のこともある. ここで, $j \in M_1$ である観測値の中で x 座標が最小であるものの番号を g , 最大であるものの番号を h , すなわち

$$(13) \quad x_g \leq x_j \leq x_h \quad (g, j, h \in M_1)$$

とし, 同様に $j \in M_2$ である観測値の中で x 座標が最小であるものの番号を k , 最大であるものの番号を n , すなわち

$$(14) \quad x_k \leq x_j \leq x_n \quad (k, j, n \in M_2)$$

とする. ただし, M_1 が唯一つの番号から成り立つときには $g=h$, M_2 が唯一つの番号から成り立つときには $k=n$ である.

補助定理 1. (13)と(14)で定義した観測値 (x_g, y_g) と (x_k, y_k) に対して

$$(15) \quad |y_g| < |y_k| \quad (g \in M_1, k \in M_2)$$

が成立するならば,

$$(16) \quad y_k > |y_i| \quad (k \in M_2, i \in M_3)$$

が成立する。

証明. 最初に, もし $y_k \leq 0$ であるならば, (11)と(12)より $y_g < 0$ となるが, これらより(15)は $-y_k > -y_g$ となる. しかし, これは $y_k > y_g$ に矛盾する. したがって, $y_k > 0$ でなければならない. 次に, (11)の定義と(12)より $y_k > y_i$ ($k \in M_2, i \in M_3$) であるから, (16)を証明するには $y_k > -y_i$ ($i \in M_3$) を証明すればよい. そこで, これに反してある番号 j に対して

$$(17) \quad y_k \leq -y_j \quad (j \in M_3)$$

が成立すると仮定する. (11)より

$$(18) \quad y_j > y_g \quad (g \in M_1, j \in M_3)$$

である. (17), (18)と $y_k > 0$ より

$$0 < y_k \leq -y_j < -y_g$$

となるが, これは(15)に矛盾する. したがって, (17)は正しくなく, (16)が成立する.

Q. E. D.

定理 4. (8)と補助定理 1 の(15)が成立するとき,

$$(19) \quad \tilde{a} > 0$$

であるための必要十分条件は,

$$(20) \quad x_k > 0 \quad (k \in M_2)$$

であり,

$$(21) \quad \tilde{a} < 0$$

であるための必要十分条件は,

$$(22) \quad x_n < 0 \quad (n \in M_2)$$

であり,

$$(23) \quad \tilde{a} = 0$$

であるための必要十分条件は,

$$(24) \quad x_k < 0 < x_n \quad (k, n \in M_2)$$

となる x_k, x_n が存在することである.

証明. 十分性. (20)が成立すると仮定し, 十分小さい正数 θ に対して

$$(25) \quad a^0 = \theta, \quad z^0 = y_k - \theta x_k$$

と定める. (25)を用い, θ が十分小さいことと(11)に注意すると,

$$(26) \quad a^0 x_i + z^0 = \theta (x_i - x_k) + y_k > y_i \quad (i \in M_1, i \in M_3)$$

となる. (14)より $x_i \geq x_k$ ($i, k \in M_2$), $\theta > 0$ であるから,

$$(27) \quad a^0 x_i + z^0 = \theta (x_i - x_k) + y_k \geq y_i \quad (i \in M_2)$$

である(等号は $i = k$ のとき成立). 同様に, (25)を用い, 補助定理 1 の(15)と(16), θ が十分小さいことより

$$(28) \quad -a^0 x_i + z^0 = -\theta (x_i + x_k) + y_k > -y_i \quad (i \in M_1, i \in M_2, i \in M_3)$$

が成立する. さらに, $y_k > 0$, θ が十分小さいことより $z^0 > 0$ である. ゆえに, (26), (27), (28), $z^0 > 0$ より(25)は主問題の実行可能解である. 次に, 目的関数(4)の最小値 $\bar{z}$ は実行可能解(25)に対する目的関数の値 z^0 以下であるから,

$$(29) \quad z^0 = y_k - \theta x_k \geq \tilde{z}$$

が成立する。他方、主問題の制約条件(5)において

$$\tilde{a}x_k + \tilde{z} \geq y_k$$

が成立している。これと(20), (29)より

$$\tilde{a} \geq \frac{y_k - \tilde{z}}{x_k} \geq \theta > 0$$

であるから、(19)がえられる。

次に、(22)が成立するとき、十分小さい正数 θ に対して

$$(30) \quad a^0 = -\theta, \quad z^0 = y_n + \theta x_n$$

と定める。(30)を用い、(11)と θ が十分小さいことに注意すると、

$$(31) \quad a^0 x_i + z^0 = \theta (x_n - x_i) + y_n > y_i \quad (i \in M_1, i \in M_3)$$

であり、(14)より $x_n \geq x_i$ ($i, n \in M_2$), $\theta > 0$ であるから、

$$(32) \quad a^0 x_i + z^0 = \theta (x_n - x_i) + y_n \geq y_i \quad (i \in M_2)$$

をえる ($i = n$ のとき等号が成立)。同様に、(30)を用い、(15), (16)と θ が十分小さいことより

$$(33) \quad -a^0 x_i + z^0 = \theta (x_i + x_n) + y_n > -y_i \quad (i \in M_1, i \in M_2, i \in M_3)$$

となる。前と同様にして、 $z^0 > 0$ である。以上の(31), (32), (33), $z^0 > 0$ より(30)は主問題の実行可能解である。(30)の実行可能解と最適解より

$$(34) \quad z^0 = y_n + \theta x_n \geq \tilde{z}$$

が成立する。また、(5)より最適解に対して

$$\tilde{a}x_n + \tilde{z} \geq y_n$$

が成立している。この式と(22), (34)より

$$\tilde{a} \leq \frac{y_n - \tilde{z}}{x_n} \leq -\theta < 0$$

であるから、(21)がえられる。

最後に、(24)が成立するとき、主問題に対して

$$(35) \quad \tilde{a} = 0, \quad \tilde{z} = y_k = y_n$$

と定め、双対問題に対して

$$(36) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_k &= \frac{x_n}{x_n - x_k}, \quad \tilde{u}_n = -\frac{x_k}{x_n - x_k} \\ \tilde{v}_k &= \tilde{v}_n = \tilde{u}_i = \tilde{v}_i = 0 \quad (i = 1, \dots, m; i \neq k, n) \end{aligned}$$

と定めて、これらが各々の問題の最適解であることを示せば、(23)がえられる。(35)と(11)より

$$\tilde{a}x_i + \tilde{z} = y_k \geq y_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

であり(等号は $i \in M_2$ のとき成立)、補助定理1の(15)と(16)より

$$-\tilde{a}x_i + \tilde{z} = y_k > -y_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

であり、 $\tilde{z} > 0$ である。よって、(35)は主問題の実行可能解である。(36)を用いると、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_i (\tilde{u}_i - \tilde{v}_i) &= x_k \tilde{u}_k + x_n \tilde{u}_n = \frac{x_k x_n - x_k x_n}{x_n - x_k} = 0 \\ \sum_{i=1}^m (\tilde{u}_i + \tilde{v}_i) &= \tilde{u}_k + \tilde{u}_n = \frac{x_n - x_k}{x_n - x_k} = 1 \end{aligned}$$

であり, (24)より $\tilde{u}_k > 0$, $\tilde{u}_n > 0$ であるから, (36)は双対問題の実行可能解である. このとき,

$$\sum_{i=1}^m y_i (\tilde{u}_i - \tilde{v}_i) = y_k \tilde{u}_k + y_n \tilde{u}_n = y_k = \tilde{z}$$

となり, 主問題の実行可能解(35)に対する目的関数(4)の値と双対問題の実行可能解(36)に対する目的関数(6)の値が等しいので, 双対定理 (Collatz and Wetterling [3], p.92, Cooper and Steinberg [4], p.162, Gale [6], pp.10-11, Hadley [8], p.228, Krekó [10], p.193, Murty [11], p.191 など) によって(35)が主問題の最適解で, (36)が双対問題の最適解である. そして双対問題の最適解は退化していないので, 主問題の最適解は一意である. (35)より直ちに(23)をえる.

必要性. (19)が成立すると仮定する. このとき, もし(20)が成立しないならば, (8)に注意して(22)か(24)のいずれかが成立しなければならない. 十分性のところで証明したように, (22)が成立するならば $\bar{a} < 0$, (24)が成立するならば $\bar{a} = 0$ となり, これらは(19)が成立するという仮定に矛盾する. したがって, このとき(20)が成立する.

他の場合についても同様に証明できる.

Q. E. D.

補助定理 2. (13)と(14)で定義した観測値 (x_g, y_g) と (x_k, y_k) に対して

$$(37) \quad |y_g| > |y_k| \quad (g \in M_1, k \in M_2)$$

が成立するならば,

$$(38) \quad -y_g > |y_i| \quad (g \in M_1, i \in M_3)$$

が成立する.

証明. 最初に, もし $y_g \geq 0$ であるならば, $y_k > 0$ となる. これらを用いると, (37)は $y_g > y_k$ となるが, これは(11)と(12)の定義に矛盾する. ゆえに, $y_g < 0$ でなければならない. 次に, (11)の定義と(12)より $y_g < y_i$ ($g \in M_1, i \in M_3$) であるから, $-y_g > -y_i$ が成立する. これより(38)を証明するには $-y_g > y_i$ を証明すればよい. そこで, これに反してある番号 j に対して

$$(39) \quad -y_g \leq y_j \quad (j \in M_3)$$

が成立すると仮定する. (11)より

$$(40) \quad y_j < y_k \quad (k \in M_2, j \in M_3)$$

であるから, (39)と(40)より

$$0 < -y_g \leq y_j < y_k$$

となるが, これは(37)に矛盾する. したがって, (39)は成立せず, (38)が成立する.

Q. E. D.

定理 5. (8)と補助定理 2 の(37)が成立するとき,

$$(41) \quad \bar{a} > 0$$

であるための必要十分条件は,

$$(42) \quad x_h < 0 \quad (h \in M_1)$$

であり,

$$(43) \quad \bar{a} < 0$$

であるための必要十分条件は,

$$(44) \quad x_g > 0 \quad (g \in M_1)$$

であり,

$$(45) \quad \tilde{a}=0$$

であるための必要十分条件は,

$$(46) \quad x_g < 0 < x_h \quad (g, h \in M_1)$$

となる x_g, x_h が存在することである.

証明. 十分性. (42)が成立すると仮定し, 十分小さい正数 θ に対して

$$(47) \quad a^0 = \theta, z^0 = -y_h + \theta x_h$$

と定める. (47)を用い, 補助定理 2 の(37), (38)と θ が十分小さいことより

$$(48) \quad a^0 x_i + z^0 = \theta (x_i + x_h) - y_h > y_i \quad (i \in M_1, i \in M_2, i \in M_3)$$

が成立する. 同様に, (47)を用い, (13)より $x_h \geq x_i \quad (h, i \in M_1), \theta > 0$ に注意すると,

$$(49) \quad -a^0 x_i + z^0 = \theta (x_h - x_i) - y_h \geq -y_i \quad (i \in M_1)$$

である(等号は $i=h$ のとき成立). また, (37), (38)と θ が十分小さいことより

$$(50) \quad -a^0 x_i + z^0 = \theta (x_h - x_i) - y_h > -y_i \quad (i \in M_2, i \in M_3)$$

が成り立つ. さらに, (38)と θ が十分小さいことより $z^0 > 0$ である. ゆえに, (48), (49), (50), $z^0 > 0$ より (47)は主問題の実行可能解である. 次に, 目的関数(4)の最小値 $\tilde{z}$ は実行可能解(47)に対する目的関数の値 z^0 以下であるから,

$$(51) \quad z^0 = -y_h + \theta x_h \geq \tilde{z}$$

が成立する. 他方, (5)より

$$-\tilde{a}x_h + \tilde{z} \geq -y_h$$

であるから, これと(42), (51)より

$$\tilde{a} \geq \frac{y_h + \tilde{z}}{x_h} \geq \theta > 0$$

となり, (41)がえられる.

次に, (44)が成立するとき, 十分小さい正数 θ に対して

$$(52) \quad a^0 = -\theta, z^0 = -\theta x_g - y_g$$

と定める. (52)を用い, (37), (38)と θ が十分小さいことより

$$(53) \quad a^0 x_i + z^0 = -\theta (x_g + x_i) - y_g > y_i \quad (i \in M_1, i \in M_2, i \in M_3)$$

をえる. 同様に, (52)を用い, (13)より $x_i \geq x_g \quad (i, g \in M_1), \theta > 0$ であるから,

$$(54) \quad -a^0 x_i + z^0 = \theta (x_i - x_g) - y_g \geq -y_i \quad (i \in M_1)$$

であり(等号は $i=g$ のとき成立), (37), (38)と θ が十分小さいことから,

$$(55) \quad -a^0 x_i + z^0 = \theta (x_i - x_g) - y_g > -y_i \quad (i \in M_2, i \in M_3)$$

が成立する. さらに, (38)より $y_g < 0$ で, θ が十分小さいから, $z^0 > 0$ である. (53), (54), (55), $z^0 > 0$ より (52)は主問題の実行可能解である. 前と同様,

$$(56) \quad z^0 = -\theta x_g - y_g \geq \tilde{z}$$

が成立する. また, (5)において

$$-\tilde{a}x_g + \tilde{z} \geq -y_g$$

であるから, この式と(44), (56)より

$$\tilde{a} \leq \frac{y_g + \tilde{z}}{x_g} \leq -\theta < 0$$

である。したがって、(43)がえられる。

最後に、(46)が成立するとき、主問題に対して

$$(57) \quad \tilde{a}=0, \quad \tilde{z}=-y_g=-y_h$$

と定め、双対問題に対して

$$(58) \quad \begin{aligned} \tilde{v}_g &= \frac{x_h}{x_h - x_g}, \quad \tilde{v}_h = -\frac{x_g}{x_h - x_g} \\ \tilde{u}_g = \tilde{u}_h = \tilde{u}_i = \tilde{v}_i &= 0 \quad (i=1, \dots, m; i \neq g, h) \end{aligned}$$

と定めて、これらが各々の問題の最適解であることを示す。このとき補助定理2の(37)と(38)より

$$\begin{aligned} \tilde{a}x_i + \tilde{z} &= -y_g > y_i \quad (i=1, \dots, m) \\ -\tilde{a}x_i + \tilde{z} &= -y_g \geq -y_i \quad (i=1, \dots, m) \end{aligned}$$

が成立する(等号は $i \in M_2$ のとき成立)。さらに、(38)に注意すると、 $\tilde{z} > 0$ である。以上より(57)は主問題の実行可能解である。また、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_i (\tilde{u}_i - \tilde{v}_i) &= -(x_g \tilde{v}_g + x_h \tilde{v}_h) = \frac{x_g x_h - x_g x_h}{x_h - x_g} = 0 \\ \sum_{i=1}^m (\tilde{u}_i + \tilde{v}_i) &= \tilde{v}_g + \tilde{v}_h = \frac{x_h - x_g}{x_h - x_g} = 1 \end{aligned}$$

であり、(46)より $\tilde{v}_g > 0$, $\tilde{v}_h > 0$ であるから、(58)は双対問題の実行可能解である。このとき、(57)と(58)に対して

$$\sum_{i=1}^m y_i (\tilde{u}_i - \tilde{v}_i) = -(y_g \tilde{v}_g + y_h \tilde{v}_h) = -y_g = \tilde{z}$$

となるから、主問題の目的関数(4)と双対問題の目的関数(6)の値が等しく、したがって双対定理により(57)が主問題の、(58)が双対問題の最適解である。そして双対問題の最適解は退化していないので、主問題の最適解は一意である。ゆえに、(45)が証明された。

必要性。(41)が成立すると仮定する。このとき、もし(42)が成立しないならば、(8)を考慮すると、(44)か(46)のいずれかが成立しなければならない。充分性のところで証明したように、(44)が成立するならば $\tilde{a} < 0$ 、(46)が成立するならば $\tilde{a} = 0$ となり、これらはいずれも(41)が成立するという仮定に反する。したがって、(41)が成立するならば、(42)が成立する。

他の場合についても同様に証明できる。

Q. E. D.

補助定理3. (13)と(14)で定義した観測値 (x_g, y_g) と (x_k, y_k) に対して

$$(59) \quad |y_g| = |y_k| \quad (g \in M_1, k \in M_2)$$

が成立するならば、

$$(60) \quad y_k = -y_g > |y_i| \quad (i \in M_3)$$

が成立する。

証明. 最初に、もし $y_k \leq 0$ であるならば、(59)より $-y_k = |y_g|$ となり、これより $-y_k = -y_g$ か $-y_k = y_g \geq 0$ のいずれかが成立する。最初の式は(12)の $M_1 \cap M_2 = \phi$ に矛盾し、2番目の式は $y_g \geq 0 \geq y_k$ を意味し、(11)あるいは(12)に矛盾する。ゆえに、 $y_k > 0$ であり、(59)と(12)より $y_k = -y_g > 0$ である。次に、

(60)を証明するには $y_k > y_i$ と $y_k > -y_i$ ($i \in M_3$) を示せばよい. 最初の不等式は(11)の定義より直ちにえられる. もし 2 番目の不等式が成立しないとすると,

$$(61) \quad y_k \leq -y_j \quad (j \in M_3)$$

となる番号 j が存在する. (11)より $y_j > y_g$ であるから, これより

$$(62) \quad -y_j < -y_g$$

が成立する. (61)と(62)より

$$y_k \leq -y_j < -y_g$$

をえるが, これは(59)に矛盾する. ゆえに, (61)は成立せず, (60)が成立する.

Q. E. D.

定理 6. (8)と補助定理 3 の(59)が成立するとき,

$$(63) \quad \tilde{a} > 0$$

であるための必要十分条件は,

$$(64) \quad x_h < 0 < x_k \quad (h \in M_1, k \in M_2)$$

であり,

$$(65) \quad \tilde{a} < 0$$

であるための必要十分条件は,

$$(66) \quad x_n < 0 < x_g \quad (g \in M_1, n \in M_2)$$

であり,

$$(67) \quad \tilde{a} = 0$$

であるための必要十分条件は,

$$(68) \quad x_g > 0, x_k > 0 \quad (g \in M_1, k \in M_2)$$

$$(69) \quad x_h < 0, x_n < 0 \quad (h \in M_1, n \in M_2)$$

のいずれかが成立することである.

証明. 十分性. (64)が成立すると仮定する.

このとき,

$$(70) \quad x_h + x_k \leq 0 \quad (h \in M_1, k \in M_2)$$

である場合には, a^0 と z^0 を定理 4 の証明における(25)のように定めると, 前と同様に(26)と(27)が成立する. また, 補助定理 3 の(59), (60), それに(70)と θ が十分小さい正数であることより(28)が成立する. さらに, $z^0 > 0$ であるから, (25)はこの場合にも主問題の実行可能解である. また,

$$(71) \quad x_h + x_k > 0 \quad (h \in M_1, k \in M_2)$$

である場合には, a^0 と z^0 を定理 5 の証明における(47)のように定めると, 補助定理 3 の(59), (60)それに(71)と θ が十分小さいことより(48)が成立し, (49), (50), $z^0 > 0$ も成立する. これらより(47)はこの場合にも主問題の実行可能解である. (64)が成立するならば, 定理 4 の(20)と定理 5 の(42)が成立し, これらが成立するならば, 定理 4 と定理 5 で証明したように結局(63)が成立する.

次に, (66)が成立すると仮定する. このとき,

$$(72) \quad x_g + x_n \geq 0 \quad (g \in M_1, n \in M_2)$$

である場合には, a^0 と z^0 を定理 4 の証明の中の(30)のように定めると, (31)と(32)が成立する. また, (59), (60), (72), $\theta > 0$ より(33)が成立する. (60)と θ が小さいことより $z^0 > 0$ であるから, この場合にも(30)は主

問題の実行可能解である。また、

$$(73) \quad x_g + x_n < 0 \quad (g \in M_1, n \in M_2)$$

である場合には、 a^0 と z^0 を定理 5 の証明における(52)のように定めると、(13), (60), (73), θ が十分小さい正数であることより(53), (54), (55), $z^0 > 0$ も成立し、(52)はこの場合にも主問題の実行可能解である。(66)は定理 4 の(22)と定理 5 の(44)を意味し、これらが成立するならば既に用いた方法と同様にして(65)が成立する。

最後に、(68)が成立するとき、主問題に対して

$$(74) \quad \tilde{a} = 0, \tilde{z} = y_k = -y_g$$

とし、双対問題に対して

$$(75) \quad \tilde{v}_g = \frac{x_k}{x_g + x_k} > 0, \tilde{u}_k = \frac{x_g}{x_g + x_k} > 0$$

$$\tilde{u}_g = \tilde{v}_k = \tilde{u}_i = \tilde{v}_i = 0 \quad (i = 1, \dots, m; i \neq g, k)$$

とする。前と同様にして(74)と(75)は各々の問題の最適解であり、双対問題の最適解(75)は退化していないので、主問題の最適解(74)は一意である。また、(69)が成立するとき、主問題に対して

$$(76) \quad \tilde{a} = 0, \tilde{z} = y_n = -y_h$$

とし、双対問題に対して

$$(77) \quad \tilde{v}_h = \frac{x_n}{x_h + x_n} > 0, \tilde{u}_n = \frac{x_h}{x_h + x_n} > 0$$

$$\tilde{u}_h = \tilde{v}_n = \tilde{u}_i = \tilde{v}_i = 0 \quad (i = 0, \dots, m; i \neq h, n)$$

と定める。(76)と(77)は各々の問題の最適解であり、(77)は退化していないので、最適解(76)は一意である。したがって、(68)あるいは(69)が成立するならば、(74)あるいは(76)より(67)をえる。

必要性。(63)が成立すると仮定する。このとき、(64)が成立しないとすると、(8)を考慮して(66), (68), (69)のいずれかが成立しなければならない。しかし、これらが成立するときには十分性のところで証明したように $\tilde{a} < 0$ あるいは $\tilde{a} = 0$ となって、(63)と矛盾する。したがって、(63)が成立するときには(64)が成立する。

他の場合についても同様に証明できる。

Q. E. D.

定理 7. (8)が成立するとき、すべての観測値が第 1 象限か第 3 象限あるいはこれらの両方にあるならば、

$$(78) \quad \tilde{a} > 0$$

であり、すべての観測値が第 2 象限か第 4 象限あるいはこれらの両方にあるならば、

$$(79) \quad \tilde{a} < 0$$

である。

証明. すべての観測値が第 1 象限か第 3 象限あるいはこれらの両方にあるとする。(13)と(14)で定義した観測値に対して、この場合(i) $x_g > 0, x_k > 0$, (ii) $x_h < 0, x_k > 0$, (iii) $x_h < 0, x_n < 0$ のいずれかとなる。(i)の場合、(12)に注意すると補助定理 1 の(15)が成立し、したがって定理 4 の(20)より(19)すなわち(78)が成立する。(ii)の場合、補助定理 1 の(15), 補助定理 2 の(37), 補助定理 3 の(59)のいずれかとなるが、定理 4 の(20), 定理 5 の(42), 定理 6 の(64)よりいずれの場合にも(78)をえる。(iii)の場合、(12)を考慮

すると補助定理 2 の(37)が成立し、したがって定理 5 の(42)よりやはり(41)すなわち(78)が成立する。

すべての観測値が第 2 象限か第 4 象限あるいはこれらの両方にあるとすると、(i) $x_g > 0, x_k > 0$, (ii) $x_g > 0, x_n < 0$, (iii) $x_k < 0, x_n < 0$ のいずれかとなる。(i)の場合、(12)に注意すると補助定理 2 の(37)が成立し、定理 5 の(44)より(43)すなわち(79)をえる。(ii)の場合、補助定理 1 の(15), 補助定理 2 の(37), 補助定理 3 の(59)のいずれかが成立するけれども、定理 4 の(22), 定理 5 の(44), 定理 6 の(66)より(79)をえる。(iii)の場合、補助定理 1 の(15)が成立し、定理 4 の(22)より(21)すなわち(79)をえる。 Q. E. D.

この定理 7 は尾崎 [13] の定理 3 と同じである。

4. 特徴づけ定理 (続き)

本節で(8)が成立しないときの特徴づけ定理について考察する。

定理 8. (14)で定義した観測値 (x_k, y_k) に対して

$$(80) \quad x_k = 0 \quad (k \in M_2)$$

$$(81) \quad |y_k| > |y_i| \quad (i=1, \dots, m; i \neq k)$$

が成立するならば、

$$(82) \quad \tilde{a} > 0, \tilde{a} = 0, \tilde{a} < 0$$

のすべてが成立する。

証明. (81)より $M_2 = \{k\}$ である。(11)より $y_k > y_i$ ($i \in M_1, i \in M_3$) であるから、もし $y_k \leq 0$ であるならば、他のすべての y_i は負である。このことを考慮すると、(81)は $-y_k > -y_i$ となり、これより $y_k < y_i$ となって(11)の定義に矛盾する。ゆえに、(81)が成立するときには、 $y_k > 0$ でなければならない。最初に、十分小さい正数 θ に対して

$$(83) \quad \begin{aligned} \tilde{a} &= \theta, \tilde{z} = y_k \\ \tilde{u}_k &= 1, \tilde{v}_k = \tilde{u}_i = \tilde{v}_i = 0 \quad (i=1, \dots, m; i \neq k) \end{aligned}$$

と定める。(80), (81), $y_k > 0$ より(83)は主問題と双対問題の最適解である(双対問題の最適解は退化している)。ゆえに、 $\tilde{a} > 0$ である。次に、

$$(84) \quad \begin{aligned} \tilde{a} &= -\theta, \tilde{z} = y_k \\ \tilde{u}_k &= 1, \tilde{v}_k = \tilde{u}_i = \tilde{v}_i = 0 \quad (i=1, \dots, m; i \neq k) \end{aligned}$$

と定める。(84)も同様に主問題と双対問題の最適解であるから、 $\tilde{a} < 0$ でもある。最後に、(83)と(84)の凸結合も最適解であるから、 $\tilde{a} = 0$ も最適解である。以上より(82)が証明された。 Q. E. D.

定理 9. (13)で定義した観測値 (x_g, y_g) に対して

$$(85) \quad x_g = 0 \quad (g \in M_1)$$

$$(86) \quad |y_g| > |y_i| \quad (i=1, \dots, m; i \neq g)$$

が成立するならば、

$$(87) \quad \tilde{a} > 0, \tilde{a} = 0, \tilde{a} < 0$$

のすべてが成立する。

証明. (86)より $M_1 = \{g\}$ である. (11)より $y_g < y_i$ ($i \in M_2, i \in M_3$) であるから, もし $y_g \geq 0$ ならば, 他のすべての y_i は正である. これらと(86)より $y_g > y_i$ となり, (11)に矛盾する. ゆえに, (86)が成立するときには, $y_g < 0$ である. 十分小さい正数 θ に対して

$$(88) \quad \begin{aligned} \tilde{a} &= \theta, \quad \tilde{z} = -y_g \\ \tilde{v}_g &= 1, \quad \tilde{u}_g = \tilde{u}_i = \tilde{v}_i = 0 \quad (i=1, \dots, m; i \neq g) \end{aligned}$$

と定める. (85), (86), $y_g < 0$ より(88)は主問題と双対問題の最適解である. ゆえに, $\tilde{a} > 0$ である. 次に,

$$(89) \quad \begin{aligned} \tilde{a} &= -\theta, \quad \tilde{z} = -y_g \\ \tilde{v}_g &= 1, \quad \tilde{u}_g = \tilde{u}_i = \tilde{v}_i = 0 \quad (i=1, \dots, m; i \neq g) \end{aligned}$$

と定めると, (89)も同様に各々の問題の最適解である. ゆえに, $\tilde{a} < 0$ をえる. 最後に, (88)と(89)の凸結合も最適解であるから, $\tilde{a} = 0$ をえる. 以上より(87)が証明された. Q. E. D.

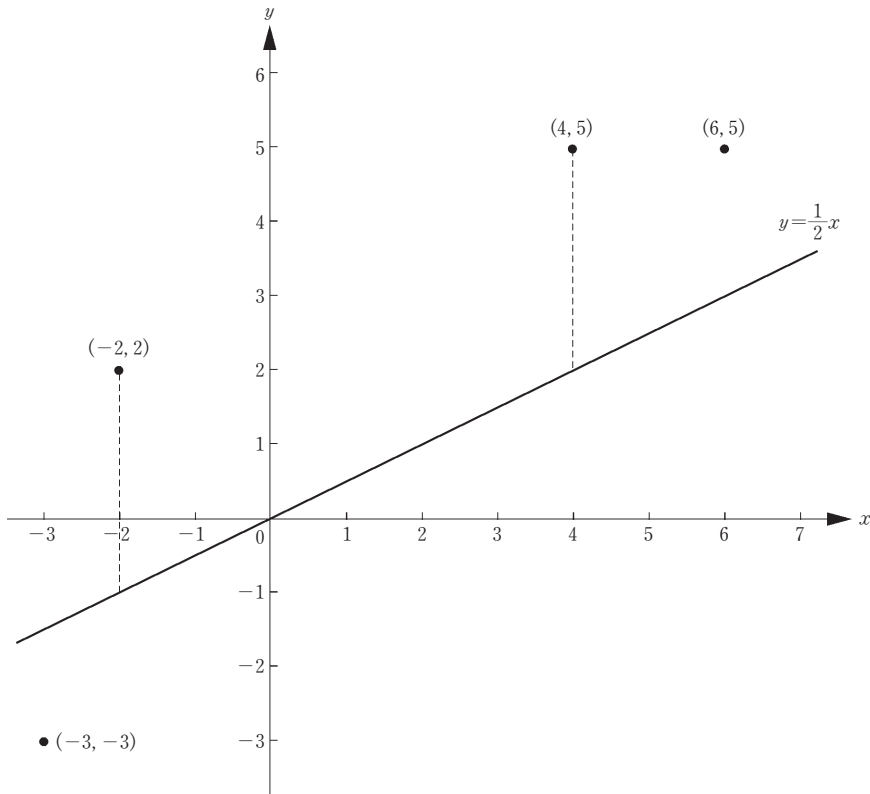
5. 数値例

本節で数値例を1つ示す.

例題. (8)を満たす4個の観測値を

$$(x_1, y_1) = (-3, -3), (x_2, y_2) = (-2, 2), (x_3, y_3) = (4, 5), (x_4, y_4) = (6, 5)$$

とする(第1図参照).



第1図

このとき, $\min y_i = y_1 = -3$, $\max y_i = y_3 = y_4 = 5$ であるから, $M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{3, 4\}$, $M_3 = \{2\}$ であり, $g = h = 1$, $k = 3$, $n = 4$ である. これより

$$(x_g, y_g) = (x_1, y_1) = (-3, -3), (x_k, y_k) = (x_3, y_3) = (4, 5)$$

であり,

$$|y_k| = |y_3| = 5 > |y_g| = |y_1| = 3, x_k = x_3 = 4 > 0$$

であるから, 補助定理 1 の(15)が成立し, 定理 4 の(20)が成立している. したがって, (19)より $\bar{a} > 0$ である. この場合, Chebyshev 基準による原点を通る回帰直線は第 1 図のように

$$y = \frac{1}{2}x$$

となり,

$$\bar{z} = 3$$

である.

参考文献

- [1] Appa, G. and Smith, C., "On L_1 and Chebyshev Estimation," *Mathematical Programming*, Vol. 5 (1973), pp.73-87.
- [2] Chvátal, V., *Linear Programming*. New York : W. H. Freeman, 1983.
- [3] Collatz, L., and Wetterling, W., *Optimization Problems*. New York : Springer-Verlag, 1975.
- [4] Cooper, L., and Steinberg, D., *Methods and Applications of Linear Programming*. Philadelphia, Pa. : W. B. Saunders, 1974.
- [5] Farebrother, R. W., "The Historical Development of the L_1 and L_∞ Estimation Procedures," in Y. Dodge (Ed.), *Statistical Data Analysis Based on the L_1 -Norm and Related Methods*. Amsterdam : North-Holland, 1987, pp.37-63.
- [6] Gale, D., *The Theory of Linear Economic Models*. New York : McGraw-Hill Book Co., 1960.
- [7] Gass, S. I., *Linear Programming : Methods and Applications*. Fifth Edition, New York : McGraw-Hill Book Co., 1985.
- [8] Hadley, G., *Linear Programming*. Reading, Mass. : Addison-Wesley Publishing Co., 1962.
- [9] Kelley, J. E., Jr., "An Application of Linear Programming to Curve Fitting," *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 6 (1958), pp.15-22.
- [10] Krekó, B., *Linear Programming*. London : Sir Isaac Pitman & Sons, 1968.
- [11] Murty, K. G., *Linear Programming*. New York : John Wiley & Sons, 1983.
- [12] 尾崎雄一郎, 「Chebyshev 基準による回帰直線の特徴づけ定理」, 『名城論叢』, 第 2 巻, 第 4 号(2002 年), pp. 21-33.
- [13] 尾崎雄一郎, 「Chebyshev 基準による原点を通る回帰直線とリニアール・プログラミング」, 『名城論叢』, 第 3 巻, 第 1 号 (2002 年), pp.1-10.
- [14] 尾崎雄一郎, 「Chebyshev 基準による回帰直線の幾何学的導出方法」, 『名城論叢』, 第 3 巻, 第 3 号(2002 年), pp. 1-8.
- [15] Wagner, H. M., "Linear Programming Techniques for Regression Analysis," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 54 (1959), pp.206-212.