

Chebyshev 基準による原点を通る 回帰直線とリニアール・プログラミング

尾 崎 雄 一 郎

1. はじめに

幾組かの観測値が与えられているとき、これらの観測値が示す傾向を知るためにしばしば回帰分析が利用される。具体的な回帰直線(平面)を求める方法として偏差の自乗和を最小にする最小自乗法が一般的であるけれども、この他に偏差の絶対値の和を最小にする最小絶対値法や偏差の絶対値の最大値を最小にするミニマックス法あるいは Chebyshev 基準と呼ばれる方法などがある。後者の 2 つの方法はリニアール・プログラミングの問題に変換でき、これらの方法による回帰直線に関する計算上の問題や特徴などが、たとえば Wagner [23], Appa and Smith [1], Sposito, Smith, and McCormick [19], Farebrother [7], 尾崎 [15] などによって考察されている。¹

さらに、データの平均などある特定の点を通る回帰直線を求める問題は、各々の観測値からこの特定の点の座標を引き、原点を通る回帰直線を求めるという問題に変換できる。原点を通る最小絶対値法による回帰直線は 1755 年から 1770 年にかけて R.J.Boscovich によって最初に考察され、幾何学的方法で解かれた。さらに、この最小絶対値法による原点を通る回帰直線は、代数的にあるいはリニアール・プログラミングを用いて、たとえば Eisenhart [6], Sheynin [16], Stigler [20], [21], Farebrother [7], 尾崎 [14] などによって考察されている。²

原点を通る最小自乗法による回帰直線は簡単に一般的に求めることができ、特に注意を惹くものではない。Chebyshev 基準による原点を通る回帰直線についてはこれまでほとんど考察されたことがない。本論文の目的は、この Chebyshev 基準による回帰直線を一般的に求め、それに基づいてこの回帰直線がもつ特徴を明らかにすることにある。また、これらの特徴が明らかになる数値例を示す。なお、このような原点を通る回帰直線を求める統計学上の問題は、尾崎 [13] が考察した 1 変数の過剰決定の方程式のウェイト付きの近似問題と形式的に同じになる。

2. リニアール・プログラミングによる問題の表示

独立変数を x , 従属変数を y とし、これらに関する i 番目の観測値を (x_i, y_i) とするとき、原点を通る回帰直線の傾きがどのようなものであっても、 $x_i=0$ である観測値に対してはその偏差を変えることができないので、このような観測値を除外しても一般性を失うことはない。したがって、観測値の数を m とすると、

$$(1) \quad x_i \neq 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

であると仮定できる。また、観測値の数は 2 個以上、すなわち $m \geq 2$ であるとする。すべての観測値と原点とが同一の直線上にあるならば、いかなる基準で回帰直線を求めるかに関係なく、それらすべての点を通る回帰直線は直ちに求まる。このような場合を除くためすべての観測値と原点とが同

一の直線上に並ぶことはないものと仮定する.

原点を通る回帰直線を

$$(2) \quad y = ax$$

とし, (1)の i 番目の観測値と(2)との偏差 e_i を

$$(3) \quad e_i = y_i - ax_i \quad (i=1, \dots, m)$$

と定める. Chebyshev 基準による原点を通る回帰直線(2)の傾きは, $\max_{i=1, \dots, m} |e_i|$ を(3)の下で最小にすることによってえられる. いま,

$$(4) \quad z = \max_{i=1, \dots, m} |e_i|$$

とすると, すべての i に対して $z \geq |e_i| \geq 0$ であるから, Chebyshev 基準によって直線(2)の傾きを求める問題は,

$$(5) \quad z$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$(6) \quad ax_i + z \geq y_i, \quad -ax_i + z \geq -y_i, \quad z \geq 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

というリニアール・プログラミングの問題として表せる. ここで, 変数は a と z で, a には符号の制約がない. この双対問題は,

$$(7) \quad \sum_{i=1}^m y_i(u_i - v_i)$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$(8) \quad \sum_{i=1}^m x_i(u_i - v_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^m (u_i + v_i) \leq 1, \quad u_i \geq 0, \quad v_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

と表せる. ここで, u_i と v_i が変数である.

次に,

$$(9) \quad I^+ = \{i | x_i > 0\}, \quad I^- = \{i | x_i < 0\}$$

とすると, (1)より

$$(10) \quad I^+ \cup I^- = \{1, \dots, m\}$$

である. さらに,

$$(11) \quad c_i = \frac{y_i}{x_i} \quad (i=1, \dots, m)$$

$$w_i = |x_i| > 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

と定める. (1)よりすべての i に対して $w_i > 0$ であり, 仮定によりすべての c_i が等しいということはない. 主問題の制約条件

$$ax_i + z \geq y_i \quad (i \in I^+), \quad -ax_i + z \geq -y_i \quad (i \in I^-)$$

は, (9)と(11)より

$$(12a) \quad w_i a_i + z \geq c_i w_i \quad (i \in I^+), \quad -w_i a_i + z \geq -c_i w_i \quad (i \in I^-)$$

と表せ, 同様に

$$ax_i + z \geq y_i \quad (i \in I^-), \quad -ax_i + z \geq -y_i \quad (i \in I^-)$$

という式は

$$(12b) \quad -w_i a_i + z \geq -c_i w_i \quad (i \in I^-), \quad w_i a_i + z \geq c_i w_i \quad (i \in I^-)$$

と表せる。双対問題の目的関数(7)と制約条件(8)は、(10)を考慮して

$$(13) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^m y_i (u_i - v_i) &= \sum_{i \in I^+} c_i w_i (u_i - v_i) - \sum_{i \in I^-} c_i w_i (u_i - v_i) \\ \sum_{i=1}^m x_i (u_i - v_i) &= \sum_{i \in I^+} w_i (u_i - v_i) - \sum_{i \in I^-} w_i (u_i - v_i) \end{aligned}$$

と表せる。したがって、主問題(5)–(6)は、(12)より

$$(14) \quad z$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$(15) \quad \begin{aligned} w_i a + z &\geq c_i w_i \quad (i \in I^+), \quad -w_i a + z \geq -c_i w_i \quad (i \in I^+) \\ -w_i a + z &\geq -c_i w_i \quad (i \in I^-), \quad w_i a + z \geq c_i w_i \quad (i \in I^-) \\ z &\geq 0 \end{aligned}$$

と書き表され、双対問題(7)–(8)は(13)より

$$(16) \quad \sum_{i \in I^+} c_i w_i (u_i - v_i) - \sum_{i \in I^-} c_i w_i (u_i - v_i)$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$(17) \quad \begin{aligned} \sum_{i \in I^+} w_i (u_i - v_i) - \sum_{i \in I^-} w_i (u_i - v_i) &= 0, \quad \sum_{i=1}^m (u_i + v_i) \leq 1 \\ u_i &\geq 0, \quad v_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \end{aligned}$$

と表される。逆に、主問題(14)–(15)と双対問題(16)–(17)から主問題(5)–(6)と双対問題(7)–(8)を導びける。

3. 最適解

本節でリニア・プログラミングの主問題と双対問題の一般的な最適解を与える。最初に、

$$(18) \quad (c_g - c_h) \frac{w_g w_h}{w_g + w_h} = \max_{i,j=1,\dots,m} (c_i - c_j) \frac{w_i w_j}{w_i + w_j}$$

と定義する(上式の右辺の最大値が g 番目と h 番目の観測値によって達成されるものとする)。主問題の最適解を $\tilde{a}$, $\tilde{z}$ とし、双対問題の最適解を $\tilde{u}_i$, $\tilde{v}_i$ と表す。(18)で定義した g と h を用いて次の基本的な定理をえる。

定理 1. 主問題(14)–(15)の最適解は、

$$(19) \quad \tilde{a} = \frac{c_g w_g + c_h w_h}{w_g + w_h}, \quad \tilde{z} = \frac{(c_g - c_h) w_g w_h}{w_g + w_h}$$

であり、双対問題(16)–(17)の最適解は、(i) $g, h \in I^+$ である場合、

$$(20a) \quad \tilde{u}_g = \frac{w_h}{w_g + w_h}, \quad \tilde{v}_h = \frac{w_g}{w_g + w_h}$$

(その他の $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ はすべてゼロ), (ii) $g, h \in I^-$ である場合、

$$(20b) \quad \tilde{u}_h = \frac{w_g}{w_g + w_h}, \quad \tilde{v}_g = \frac{w_h}{w_g + w_h}$$

(その他の $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ はすべてゼロ), (iii) $g \in I^+$, $h \in I^-$ である場合,

$$(20c) \quad \tilde{u}_g = \frac{w_h}{w_g + w_h}, \quad \tilde{u}_h = \frac{w_g}{w_g + w_h}$$

(その他の $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ はすべてゼロ), (iv) $g \in I^-$, $h \in I^+$ である場合,

$$(20d) \quad \tilde{v}_g = \frac{w_h}{w_g + w_h}, \quad \tilde{v}_h = \frac{w_g}{w_g + w_h}$$

(その他の $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ はすべてゼロ), である.

証明. 最初に, (19)が制約条件(15)の実行可能解であることを示す. (18)より

$$(21) \quad (c_g - c_h) \frac{w_g w_h}{w_g + w_h} \geq (c_i - c_j) \frac{w_i w_j}{w_i + w_j} \quad (i, j = 1, \dots, m)$$

をえる ($i=j$ の場合を含めて取り扱ってもよい). (21)において $j=h$ として整理すると,

$$(22) \quad \frac{w_i(c_g w_g + c_h w_h) + (c_g - c_h) w_g w_h}{w_g + w_h} \geq c_i w_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

をえる. また, (21)において $i=g$ として整理し, その後 $j=i$ と書き直すと,

$$(23) \quad \frac{-w_i(c_g w_g + c_h w_h) + (c_g - c_h) w_g w_h}{w_g + w_h} \geq -c_i w_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

をえる. (19)と(22)より

$$(24) \quad w_i \tilde{a} + \tilde{z} = \frac{w_i(c_g w_g + c_h w_h) + (c_g - c_h) w_g w_h}{w_g + w_h} \geq c_i w_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

が成立し, (19)と(23)より

$$(25) \quad -w_i \tilde{a} + \tilde{z} = \frac{-w_i(c_g w_g + c_h w_h) + (c_g - c_h) w_g w_h}{w_g + w_h} \geq -c_i w_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

が成立する. さらに, すべての i について $w_i > 0$ であり, 仮定によりすべての c_i が等しいことはないから, (18)より(19)の $\tilde{z}$ は正である. このことと(24), (25)より(19)は主問題の実行可能解である.

次に, (i)の場合, (20a) より

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I^+} w_i(\tilde{u}_i - \tilde{v}_i) - \sum_{i \in I^-} w_i(\tilde{u}_i - \tilde{v}_i) &= \frac{w_g w_h}{w_g + w_h} - \frac{w_g w_h}{w_g + w_h} = 0 \\ \sum_{i=1}^m (\tilde{u}_i - \tilde{v}_i) &= \frac{w_g}{w_g + w_h} + \frac{w_h}{w_g + w_h} = 1 \end{aligned}$$

であり, 明らかにすべての $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ は非負であるから, (20a) は双対問題の実行可能解である. 同様に, (20b), (20c), (20d) の場合も双対問題の実行可能解である. 最後に, 主問題の実行可能解に対する目的関数(14)の値と双対問題の実行可能解の (20a) から (20d) に対する目的関数(16)の値は, いずれも

$$\sum_{i \in I^+} c_i w_i(\tilde{u}_i - \tilde{v}_i) - \sum_{i \in I^-} c_i w_i(\tilde{u}_i - \tilde{v}_i) = \frac{(c_g - c_h) w_g w_h}{w_g + w_h} = \tilde{z}$$

であって, 等しい. したがって, 双対定理³により, (19)が主問題の最適解で, (20)が双対問題の最適解

である。

Q. E. D.

4. 特徴づけ定理

本節で Chebyshev 基準による原点を通る回帰直線の特徴づける定理を証明する。

定理 2. 主問題(14)–(15)の最適解(19)は一意である。

証明. 双対問題の制約条件(17)には 2 本の制約式があり、定理 1 の双対問題の最適解(20)はいずれの場合にも 2 つの変数が正の値をとる。したがって、双対問題の最適解は退化していない。ゆえに主問題の最適解(19)は一意である。⁴

Q. E. D.

定理 3. Chebyshev 基準による原点を通る回帰直線の傾き $\tilde{a}$ は、観測値のすべてが $x-y$ 平面の第 1 象限か第 3 象限あるいはこれらの両方にあるならば、

$$(26) \quad \tilde{a} > 0$$

であり、観測値のすべてが第 2 象限か第 4 象限あるいはこれらの両方にあるならば、

$$(27) \quad \tilde{a} < 0$$

である。

証明. すべての観測値が第 1 象限か第 3 象限あるいはこれらの両方にあるならば、すべての i について $c_i \geq 0$ であり、仮定によりすべての c_i が等しくなることはないので、少なくとも 1 つの i について $c_i > 0$ であり、すべての i について $w_i > 0$ であるから、(18)に注意して、(19)より(26)をえる。

同様に、すべての観測値が第 2 象限か第 4 象限あるいはこれらの両方にあるならば、すべての i について $c_i \leq 0$ であり、すべての c_i が等しくなることはないから、(19)より(27)をえる。

Q. E. D.

定理 4. すべての観測値が $x-y$ 平面の第 1 象限か第 4 象限あるいはこれらの両方にある、または第 2 象限か第 3 象限あるいはこれらの両方にあるならば、Chebyshev 基準による原点を通る回帰直線との偏差の絶対値が最大となる観測値は、 (x_g, y_g) と (x_h, y_h) であり、この回帰直線はこれら 2 つの観測値の中点を通り、その傾きは

$$(28) \quad \tilde{a} = \frac{y_g + y_h}{x_g + x_h}$$

である。

証明. すべての観測値が第 1 象限か第 4 象限あるいはこれらの両方にあるならば、(9)と(10)より $I^+ = \{1, \dots, m\}$ であり、したがって $g, h \in I^+$ である。この場合、双対問題(16)–(17)の最適解は定理 1 の(20a)となる。相補弛緩定理⁵を適用すると、(15)より

$$w_g \tilde{a} + \tilde{z} = c_g w_g, \quad -w_h \tilde{a} + \tilde{z} = -c_h w_h \quad (g, h \in I^+)$$

をえる。(11)よりこれらは

$$\tilde{z} = y_g + \tilde{a}x_g > 0, \quad \tilde{z} = -y_h + \tilde{a}x_h > 0$$

と表せるから、求める回帰直線との偏差の絶対値が最大となる観測値は、この回帰直線の上方に位置する (x_g, y_g) と下方に位置する (x_h, y_h) の 2 つである。このとき、(11)を用いると、(19)より

$$\tilde{a} = \frac{c_g w_g + c_h w_h}{w_g + w_h} = \frac{y_g + y_h}{x_g + x_h}$$

であり, (28)をえる. (28)で示される傾きをもつ回帰直線はこれら2つの観測値の中点を通る.

すべての観測値が第2象限か第3象限あるいはこれらの両方にある場合, $I^- = \{1, \dots, m\}$ となり, したがって $g, h \in I^-$ である. この場合, 双対問題(16)–(17)の最適解は(20b)である. 前と同様に,

$$-w_h \tilde{a} + \tilde{z} = -c_h w_h, \quad w_g \tilde{a} + \tilde{z} = c_g w_g \quad (g, h \in I^-)$$

となるから, これらより

$$\tilde{z} = y_h - \tilde{a} x_h > 0, \quad \tilde{z} = -y_g + \tilde{a} x_g > 0$$

となり, 求める回帰直線との偏差の絶対値が最大となる観測値はこの回帰直線の上方に位置する (x_h, y_h) と下方に位置する (x_g, y_g) の2つである. さらに, (11)と(19)より(28)をえる. この回帰直線はやはりこれら2つの観測値の中点を通る. Q. E. D.

定理5. (9)で定義された I^+ , I^- , (18)で定義された g と h に対して $g \in I^+$, $h \in I^-$ であるか, あるいは $g \in I^-$, $h \in I^+$ である場合, 求める回帰直線との偏差の絶対値が最大となる観測値は (x_g, y_g) と (x_h, y_h) の2つで, この回帰直線の傾きは,

$$(29) \quad \tilde{a} = \frac{y_g - y_h}{x_g - x_h}$$

であり, これら2つの観測値を結んだ直線の傾きと等しく, これら2つの観測値はともにこの回帰直線の上方か, あるいは下方に位置する.

証明. 最初に, $g \in I^+$, $h \in I^-$ である場合, 双対問題(16)–(17)の最適解は定理1の(20c)で与えられるから, 相補弛緩定理を適用すると, 主問題の制約条件(15)より

$$w_g \tilde{a} + \tilde{z} = c_g w_g \quad (g \in I^+), \quad -w_h \tilde{a} + \tilde{z} = -c_h w_h \quad (h \in I^-)$$

をえる. これらは(11)より

$$\tilde{z} = y_g - \tilde{a} x_g > 0, \quad \tilde{z} = y_h - \tilde{a} x_h > 0$$

となる. したがって, 偏差の絶対値が $\tilde{z}$ に等しい観測値は, (x_g, y_g) と (x_h, y_h) の2つであり, これらはともにこの回帰直線の上方に位置する. このとき, (11)と(19)より

$$\tilde{a} = \frac{c_g w_g + c_h w_h}{w_g + w_h} = \frac{y_g - y_h}{x_g - x_h}$$

となるから, (29)をえる. (29)は求める回帰直線の傾きがこれら2つの観測値を結ぶ直線の傾きに等しいことを示している.

次に, $g \in I^-$, $h \in I^+$ である場合, 双対問題の最適解は(20d)である. 相補弛緩定理を適用すると, (15)より

$$w_g \tilde{a} + \tilde{z} = c_g w_g \quad (g \in I^-), \quad -w_h \tilde{a} + \tilde{z} = -c_h w_h \quad (h \in I^+)$$

となる. これらより

$$\tilde{z} = -y_g + \tilde{a} x_g > 0, \quad \tilde{z} = -y_h + \tilde{a} x_h > 0$$

をえる. ゆえに, 偏差の絶対値が $\tilde{z}$ に等しい観測値は (x_g, y_g) と (x_h, y_h) の2つで, これらはともにこの回帰直線の下方に位置し, (19)より

$$\tilde{a} = \frac{C_g w_g + C_h w_h}{w_g + w_h} = \frac{-y_g + y_h}{-x_g + x_h}$$

となる。これは(29)と同じであり、求める回帰直線はこれら 2 つの観測値を結んでできる直線と平行である。 Q. E. D.

5. 数値例

本節で Chebyshev 基準による原点を通る回帰直線の数値例を 2 つ示す。

例題 1. (1)を満たす 4 個の観測値を

$$(x_1, y_1) = (1, 3), (x_2, y_2) = (3, 2), (x_3, y_3) = (-3, -1), (x_4, y_4) = (-1, -2)$$

とする(第 1 図参照)。

(9)より $I^+ = \{1, 2\}$, $I^- = \{3, 4\}$ であり, (3)の偏差 e_i , (11)の c_i , w_i は,

$$e_1 = 3 - a, \quad c_1 = 3, \quad w_1 = 1$$

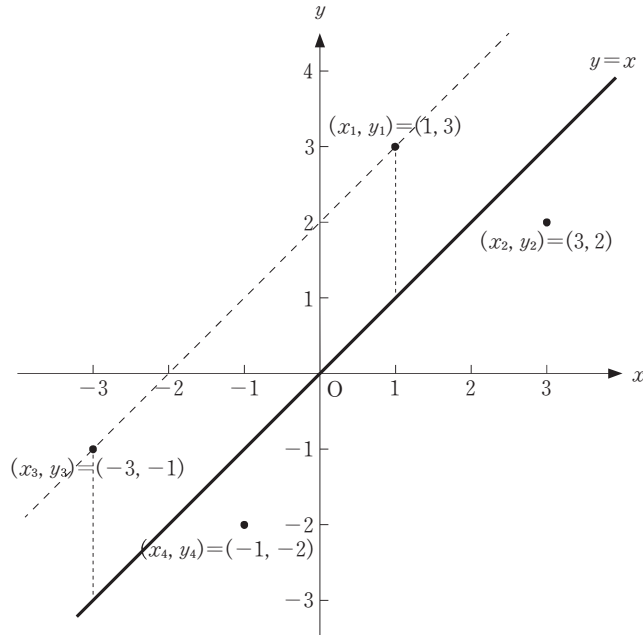
$$e_2 = 2 - 3a, \quad c_2 = \frac{2}{3}, \quad w_2 = 3$$

$$e_3 = -1 + 3a, \quad c_3 = \frac{1}{3}, \quad w_3 = 3$$

$$e_4 = -2 + a, \quad c_4 = 2, \quad w_4 = 1$$

である。このとき, (18)において 1 番目の観測値 $(1, 3)$ と 3 番目の観測値 $(-3, -1)$ に対する

$$(c_1 - c_3) \frac{w_1 w_3}{w_1 + w_3} = 2$$



第 1 図

が最大になるから, $g=1$, $h=3$ である. したがって, 主問題の(5)–(6)あるいは(14)–(15)の最適解は, 定理1の(19)より

$$\tilde{a} = \frac{c_1 w_1 + c_3 w_3}{w_1 + w_3} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} = 1, \quad \tilde{z} = \frac{(c_1 - c_3) w_1 w_3}{w_1 + w_3} = 2$$

である. 定理2が示すようにこの最適解は一意で, 求める回帰直線は第1図のように

$$y = x$$

となり, 偏差の絶対値の最大値の最小値は2である. 双対問題(7)–(8)あるいは(16)–(17)の最適解は, (20c)より

$$\tilde{u}_1 = -\frac{w_3}{w_1 + w_3} = -\frac{3}{4}, \quad \tilde{u}_3 = \frac{w_1}{w_1 + w_3} = \frac{1}{4}$$

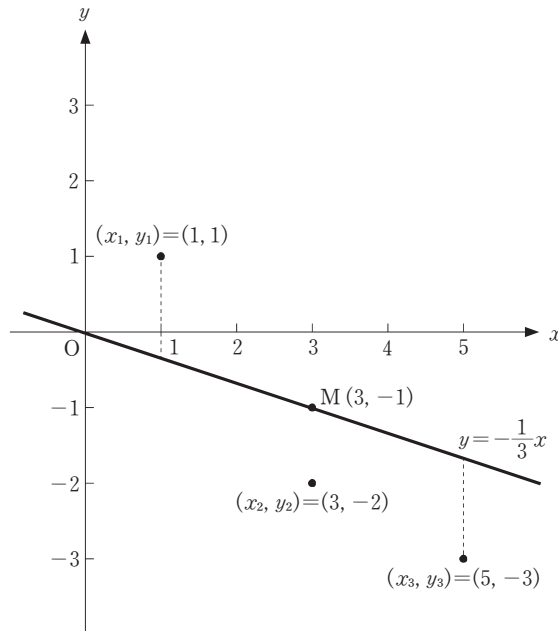
(その他の $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ はすべてゼロ)である. この場合, すべての観測値が第1象限と第3象限にあるので, 定理3の(26)が示すように求める回帰直線の傾きは正であり, $g=1 \in I^+$, $h=3 \in I^-$ であるので, 定理5が示すようにこの回帰直線は偏差の絶対値が $\tilde{z}$ に等しい2つの観測値 $(1, 3)$ と $(-3, -1)$ とを結んだ直線に平行である.

例題2. (1)を満たす3個の観測値を

$$(x_1, y_1) = (1, 1), \quad (x_2, y_2) = (3, -2), \quad (x_3, y_3) = (5, -3)$$

とする(第2図参照).

このとき, $I^+ = \{1, 2, 3\}$ であり,



第2図

$$\begin{aligned} e_1 &= 1 - a, \quad c_1 = 1, \quad w_1 = 1 \\ e_2 &= -2 - 3a, \quad c_2 = -\frac{2}{3}, \quad w_2 = 3 \\ e_3 &= -3 - 5a, \quad c_3 = -\frac{3}{5}, \quad w_3 = 5 \end{aligned}$$

である。(18)において1番目の観測値(1, 1)と3番目の観測値(5, -3)に対する

$$(c_1 - c_3) \frac{w_1 w_3}{w_1 + w_3} = \frac{4}{3}$$

が最大になるから、 $g=1$, $h=3$ である。ゆえに、定理1の(19)より主問題の最適解は、

$$\tilde{a} = \frac{c_1 w_1 + c_3 w_3}{w_1 + w_3} = \frac{y_1 + y_3}{x_1 + x_3} = -\frac{1}{3}, \quad \tilde{z} = \frac{(c_1 - c_3) w_1 w_3}{w_1 + w_3} = \frac{4}{3}$$

であり、定理2が示すように最適解は一意で、回帰直線は第2図のように

$$y = -\frac{1}{3}x$$

であり、偏差の絶対値の最大値の最小値は $\frac{4}{3}$ である。双対問題の最適解は、(20a)より

$$\tilde{u}_1 = \frac{w_3}{w_1 + w_3} = \frac{5}{6}, \quad \tilde{v}_3 = \frac{w_1}{w_1 + w_3} = \frac{1}{6}$$

(その他の $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ はすべてゼロ)である。この場合、すべての観測値が第1象限と第4象限にあるので、定理4が示すようにこの回帰直線は1番目の観測値(1, 1)と3番目の観測値(5, -3)の中点M(3, -1)を通る。

注

- 1 さらに, Sposito [17], pp.116-122, Arthanari and Dodge [2], pp.16-21, 22-24, 94-100, Sposito [18], pp.133-145 なども参照のこと。
- 2 さらに, Stigler [22], pp.39-50 なども参照のこと。
- 3 たとえば, Collatz and Wetterling [4], p.92, Cooper and Steinberg [5], p.162, Gale [8], pp.10-11, Hadley [10], p.228, Krekó [11], p.193, Murty [12], p.191 などを参照のこと。
- 4 たとえば, Chvátal [3], p.65, Krekó [11], p.195, Murty [12], p.140 などを参照のこと。
- 5 たとえば, Chvátal [3], pp.62-64, Collatz and Wetterling [4], pp.92-93, Cooper and Steinberg [5], pp.174-175, Gale [8], pp.19-20, Gass [9], pp.168-170, Hadley [10], pp.239-241, Krekó [11], p.196, Murty [12], pp.197-198 などを参照のこと。

参考文献

- [1] Appa, G., and Smith, C., "On L_1 and Chebyshev Estimation," *Mathematical Programming*, Vol. 5 (1973), pp.73-87.
- [2] Arthanari, T. S., and Dodge, Y., *Mathematical Programming in Statistics*. New York : John Wiley & Sons, 1981.
- [3] Chvátal, V., *Linear Programming*. New York : W. H. Freeman, 1983.

- [4] Collatz, L., and Wetterling, W., *Optimization Problems*. New York : Springer-Verlag, 1975.
- [5] Cooper, L., and Steinberg, D., *Methods and Applications of Linear Programming*. Philadelphia, Pa. : W. B. Saunders, 1974.
- [6] Eisenhart, C., “Boscovich and the Combination of Observations,” in Whyte, L. L. (Ed.), *Roger Joseph Boscovich : Studies of His Life and Work on the 250th Anniversary of His Birth*. London : George Allen & Unwin, 1961, pp.200-212. Kendall, M., and Plackett, R. L. (Eds.), *Studies in the History of Statistics and Probability*. Vol.II, London : Charles Griffin, 1977, pp.88-100 に再録.
- [7] Farebrother, R. W., “The Historical Development of the L_1 and L_∞ Estimation Procedures,” in Dodge, Y. (Ed.), *Statistical Data Analysis Based on the L_1 -Norm and Related Methods*. Amsterdam : North-Holland, 1987, pp.37-63.
- [8] Gale, D., *The Theory of Linear Economic Models*. New York : McGraw-Hill Book Co., 1960.
- [9] Gass, S. I., *Linear Programming : Methods and Applications*. Fifth Edition, New York : McGraw-Hill Book Co., 1985.
- [10] Hadley, G., *Linear Programming*. Reading, Mass. : Addison-Wesley Publishing Co., 1962.
- [11] Krekó, B., *Linear Programming*. London : Sir Isaac Pitman & Sons, 1968.
- [12] Murty, K. G., *Linear Programming*. New York : John Wiley & Sons, 1983.
- [13] 尾崎雄一郎, 「ウェイト付きの近似問題とリニア・プログラミング」, 『名城商学』, 第39巻, 第1号 (1989年), pp.1-13.
- [14] ———, 「最小絶対値法による原点を通る回帰直線」, 『名城商学』, 第47巻, 第1号 (1997年), pp.29-52.
- [15] ———, 「Chebyshev 基準による回帰直線の特徴づけ定理」, 『名城論叢』, 第2巻, 第4号 (2002年), pp.21-33.
- [16] Sheynin, O. B., “R. J. Boscovich’s Work on Probability,” *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 9 (1973), pp.306-324.
- [17] Sposito, V. A., *Linear and Nonlinear Programming*. Ames, Iowa : Iowa State University Press, 1975.
- [18] ———, *Linear Programming with Statistical Applications*. Ames, Iowa : Iowa State University Press, 1989.
- [19] ———, Smith, V., and McCormick, G., *Minimizing the Sum of Absolute Deviations*. Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht, 1978.
- [20] Stigler, S. M., “Laplace, Fisher, and the Discovery of the Concept of Sufficiency,” *Biometrika*, Vol. 60 (1973), pp.439-445.
- [21] ———, “Boscovich, Simpson and a 1760 Manuscript Note on Fitting a Linear Relation,” *Biometrika*, Vol. 71 (1984), pp.615-620.
- [22] ———, *The History of Statistics : The Measurement of Uncertainty before 1900*. Cambridge, Mass. : The Belknap Press of Harvard University Press, 1986.
- [23] Wagner, H. M., “Linear Programming Techniques for Regression Analysis,” *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 54 (1959), pp.206-212.