特殊な条件の下での Chebyshev 近似

尾　崎　雄一郎

1．はじめに

過剰決定の線形連立方程式の誤差の絶対値の最大値である L_∞ ノルムを最小にする Chebyshev 基準によって近似解を求める方法は広く用いられ，1変数の場合にはその幾何学的解法が知られている(たとえば Cheney［2］, pp. 30-3, Rice［10］, pp. 180-1)．この基準による近似解はリニアー・プログラミングの問題に変換して解くことができる(Collatz and Wetterling［3］, pp. 256-67, Rabinowitz［9］, Rice［10］, pp. 180-1, Rivlin［11］, pp. 42-3, Stiefel［12］,［13］, Watson［14］, pp. 39-40, Zukhovitskiy and Avdeyeva［15］, pp. 190-207)．方程式の数が変数の数より1個多い場合の Chebyshev 基準による近似解は，$n+1$ 個の方程式によって定まる n 次元単体の $n+1$ 個の頂点を各々最適な双対変数の値によってウェイト付けしたものであることを尾崎［8］が証明し，これに基づいてこの基準による近似解が n 次元単体の重心と一致するための必要十分条件を明らかにした．

本論文において n 個の変数からなる $n+1$ 個の過剰決定の線形方程式を考え，これらの方程式によって定まる n 次元単体の(1つを除く) n 個の頂点の各々の座標から一部分ずつ取り出して生成した n 次元の点が Chebyshev 基準による近似解となるための条件を明らかにする．

2．特殊な条件の下での Chebyshev 近似

方程式の数が変数の数より1個多い過剰決定の線形連立方程式を

$$
\begin{array}{ll}
 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
(1) & \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
 & a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \cdots + a_{n+1,n}x_n = b_{n+1}
\end{array}
$$

$(n \geqq 2)$ とする．過剰決定の連立方程式の場合，無矛盾の連立方程式の場合と異なって任意の式を -1 倍することはできても，これ以外の定数を掛けることはできない．必要ならば(1)の幾つかの式を -1 倍したとき，

$$
\begin{array}{lll}
(2) & a_{ij} = a_{1j} & (i=2, \cdots, n+1,\ j=1, \cdots, n,\ i \neq j+1) \\
 & a_{ij} \neq a_{1j} & (j=1, \cdots, n,\ i=j+1)
\end{array}
$$

が成立すると仮定する．(2)の下で(1)は，

(3)
$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_2 + \cdots + \quad a_{1n}x_n = b_1 \\
\underline{a_{21}}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + \quad a_{1n}x_n = b_2 \\
a_{11}x_1 + \underline{a_{32}}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + \quad a_{1n}x_n = b_3 \\
\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + \underline{a_{n+1,n}}x_n = b_{n+1}
\end{array}$$

と表せる．

(3) の i 番目の方程式に対する誤差を e_i とすると，

(4)
$$\begin{array}{l}
e_1 = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,i-1}x_{i-1} + \cdots + a_{1n}x_n) \\
e_i = b_i - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + \underline{a_{i,i-1}}x_{i-1} + \cdots + a_{1n}x_n) \quad (i=2, \cdots, n+1)
\end{array}$$

と表せる．Chebyshev 基準による近似解は，

(5)
$$z \equiv \max_{i=1,\cdots,n+1} |e_i|$$

を最小にすることによってえられる．(5) よりすべての i に対して $z \geqq |e_i| \geqq 0$ であるから，

$$z \geqq e_i,\ z \geqq -e_i \quad (i=1, \cdots, n+1)$$

が成立する．これらに (4) の e_i を代入して整理すると，過剰決定の連立方程式 (3) の Chebyshev 基準による近似解は，

(6)
$$z$$

を次の制約条件の下で最小にする

(7)
$$\begin{array}{rl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \cdots\ + a_{1n}x_n + z & \geqq \ \ b_1 \\
-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ \cdots\ - a_{1n}x_n + z & \geqq -b_1 \\
\underline{a_{21}}x_1 + a_{12}x_2 + \ \cdots\ + a_{1n}x_n + z & \geqq \ \ b_2 \\
-\underline{a_{21}}x_1 - a_{12}x_2 - \ \cdots\ - a_{1n}x_n + z & \geqq -b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad \vdots & \quad \vdots \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + \underline{a_{n+1,n}}x_n + z & \geqq \ \ b_{n+1} \\
-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - \underline{a_{n+1,n}}x_n + z & \geqq -b_{n+1} \\
z & \geqq 0
\end{array}$$

というリニアー・プログラミングの問題の最適解としてえられる．主問題 (6)−(7) に対する双対問題は，

(8)
$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i (u_i - v_i)$$

を次の制約条件の下で最大にする

(9)
$$\begin{array}{r}
a_{21}(u_2 - v_2) + a_{11}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{n+1} (u_i - v_i) = 0 \\
a_{32}(u_3 - v_3) + a_{12}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 3}}^{n+1} (u_i - v_i) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n+1,n}(u_{n+1} - v_{n+1}) + a_{1n}\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i) = 0 \\
\sum_{i=1}^{n+1} (u_i + v_i) \leqq 1
\end{array}$$

$$u_i \geqq 0,\ v_i \geqq 0 \quad (i=1, \cdots, n+1)$$

と表せる．

３．n 次元単体の頂点の座標

(3) の(１番目の方程式以外の) ２番目以降の各式を１つずつ除いてできる n 個の交点を求める．(3) から２番目以下の h 番目の方程式を除いた n 個の連立方程式は，$h=2, \cdots, n+1$ に対して

$$(10)\quad \begin{array}{l} a_{11}x_1^{(h)} + \cdots + a_{1,h-2}x_{h-2}^{(h)} + a_{1,h-1}x_{h-1}^{(h)} + a_{1h}x_h^{(h)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(h)} = b_1 \\ \underline{a_{21}}x_1^{(h)} + \cdots + a_{1,h-2}x_{h-2}^{(h)} + a_{1,h-1}x_{h-1}^{(h)} + a_{1h}x_h^{(h)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(h)} = b_2 \\ \vdots \\ a_{11}x_1^{(h)} + \cdots + \underline{a_{h-1,h-2}}x_{h-2}^{(h)} + a_{1,h-1}x_{h-1}^{(h)} + a_{1h}x_h^{(h)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(h)} = b_{h-1} \\ a_{11}x_1^{(h)} + \cdots + a_{1,h-2}x_{h-2}^{(h)} + a_{1,h-1}x_{h-1}^{(h)} + \underline{a_{h+1,h}}x_h^{(h)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(h)} = b_{h+1} \\ \vdots \\ a_{11}x_1^{(h)} + \cdots + a_{1,h-2}x_{h-2}^{(h)} + a_{1,h-1}x_{h-1}^{(h)} + a_{1h}x_h^{(h)} + \cdots + \underline{a_{n+1,n}}x_n^{(h)} = b_{n+1} \end{array}$$

と表せる．(10) の解は (3) によってできる n 次元単体の n 個の頂点の座標である(１番目の方程式を除いてできるもう１つの頂点の座標はこの場合必要ない)．(10) の２番目以降の各式から１番目の式を引くと，

$$\begin{array}{c} (a_{21} - a_{11})\, x_1^{(h)} = b_2 - b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{h-1,h-2} - a_{1,h-2})\, x_{h-2}^{(h)} = b_{h-1} - b_1 \\ (a_{h+1,h} - a_{1h})\, x_h^{(h)} = b_{h+1} - b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{n+1,n} - a_{1n})\, x_n^{(h)} = b_{n+1} - b_1 \end{array}$$

となる．これらより $a_{j+1,j} \neq a_{1j}$ であるなら，

$$(11)\qquad x_j^{(h)} = \frac{b_{j+1} - b_1}{a_{j+1,j} - a_{1j}} \qquad (j=1, \cdots, h-2,\ h, \cdots, n,\ h=2, \cdots, n+1)$$

である．次に，(11) に欠けている $x_{h-1}^{(h)}$ の値を求める．以下において

$$(12)\qquad a_{1j} \cdot a_{j+1,j} < 0 \qquad (j=1, \cdots, n)$$

であると仮定し，

$$(13)\qquad \theta_{j+1} = \frac{a_{1j}}{a_{1j} - a_{j+1,j}} \qquad (j=1, \cdots, n)$$

と定めると，(12) より

$$(14)\qquad 0 < \theta_{j+1} < 1 \qquad (j=1, \cdots, n)$$

である．このとき，(10) の最初の式に (11) を代入し，(13) を用いると，

$$\sum_{j=2}^{h-1} (b_1 - b_j)\, \theta_j + a_{1,h-1}x_{h-1}^{(h)} + \sum_{j=h+1}^{n+1} (b_1 - b_j)\, \theta_j = b_1$$

と表せる．これより $x_{h-1}^{(h)}$ は

(15) $$x_{h-1}^{(h)}=\frac{\left(1-\sum_{\substack{j=2\\j\neq h}}^{n+1}\theta_j\right)b_1+\sum_{\substack{j=2\\j\neq h}}^{n+1}\theta_j b_j}{a_{1,h-1}}\qquad(h=2,\cdots,n+1)$$

となる．

(3) によってできる n 次元単体の $n+1$ 個の頂点のうち，２番目以降の各式を１つずつ除いてできる n 個の頂点の座標は，(11) と (15) より

$$\left[x_1^{(h)},\cdots,x_{h-2}^{(h)},x_{h-1}^{(h)},x_h^{(h)},\cdots,x_n^{(h)}\right]$$

(16) $$=\left[\frac{b_2-b_1}{a_{21}-a_{11}},\cdots,\frac{b_{h-1}-b_1}{a_{h-1,h-2}-a_{1,h-2}},\frac{\left(1-\sum_{\substack{j=2\\j\neq h}}^{n+1}\theta_j\right)b_1+\sum_{\substack{j=2\\j\neq h}}^{n+1}\theta_j b_j}{a_{1,h-1}},\frac{b_{h+1}-b_1}{a_{h+1,h}-a_{1h}},\cdots,\frac{b_{n+1}-b_1}{a_{n+1,n}-a_{1n}}\right]\qquad(h=2,\cdots,n+1)$$

であり，(16) より

$$x_1^{(3)}=x_1^{(4)}=\cdots=x_1^{(n+1)}=\frac{b_2-b_1}{a_{21}-a_{11}}$$

$$x_2^{(2)}=x_2^{(4)}=\cdots=x_2^{(n+1)}=\frac{b_3-b_1}{a_{32}-a_{12}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n^{(2)}=x_n^{(3)}=\cdots=x_n^{(n)}=\frac{b_{n+1}-b_1}{a_{n+1,n}-a_{1n}}$$

である．これらより

(17) $$\tilde{x}_1=\frac{b_2-b_1}{a_{21}-a_{11}},\ \tilde{x}_2=\frac{b_3-b_1}{a_{32}-a_{12}},\cdots,\ \tilde{x}_n=\frac{b_{n+1}-b_1}{a_{n+1,n}-a_{1n}}$$

と定め，(17) の $\tilde{x}_j$ に対する (4) の e_i を $\tilde{e}_i$ と表すと，

(18) $$\begin{aligned}\tilde{e}_1&=b_1-\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\tilde{x}_j\\ \tilde{e}_i&=b_i-a_{i,i-1}\tilde{x}_{i-1}-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i-1}}^{n}a_{1j}\tilde{x}_j\qquad(i=2,\cdots,n+1)\end{aligned}$$

であるから，(17) と (18) より

$$\begin{aligned}\tilde{e}_i-\tilde{e}_1&=(a_{1,i-1}-a_{i,i-1})\tilde{x}_{i-1}+b_i-b_1\\&=(a_{1,i-1}-a_{i,i-1})\frac{(b_i-b_1)}{a_{i,i-1}-a_{1,i-1}}+b_i-b_1=0\quad(i=2,\cdots,n+1)\end{aligned}$$

となる．したがって，

(19) $$\tilde{e}_i=\tilde{e}_1\qquad(i=2,\cdots,n+1)$$

が成立する．(17) の $\tilde{x}_j$ に対する z を $\tilde{z}$ と表すと，(5) と (19) より

(20) $$\tilde{z}=|\tilde{e}_i|\qquad(i=1,\cdots,n+1)$$

である．(13)，(17)，(18)，(20) より

$$\begin{aligned}\tilde{z}&=|\tilde{e}_1|=\left|b_1-\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\tilde{x}_j\right|\\&=\left|b_1-\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{j+1,j}-a_{1j}}(b_{j+1}-b_1)\right|\end{aligned}$$

$$= \left| (1 - \sum_{j=1}^{n} \theta_{j+1})\, b_1 + \sum_{j=1}^{n} \theta_{j+1} b_{j+1} \right|$$

であるから，

$$\tilde{z} = \begin{cases} (1 - \sum_{j=1}^{n} \theta_{j+1})\, b_1 + \sum_{j=1}^{n} \theta_{j+1} b_{j+1} & (\tilde{e}_1 > 0 \text{ のとき}) \\ (\sum_{j=1}^{n} \theta_{j+1} - 1)\, b_1 - \sum_{j=1}^{n} \theta_{j+1} b_{j+1} & (\tilde{e}_1 < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{21}$$

である．(21) においてもし $\tilde{z} = 0$ ならば，(20) よりすべての $\tilde{e}_i = 0$ となり，(3) が過剰決定であるという仮定に矛盾するから，

$$\tilde{z} > 0 \tag{22}$$

でなければならない．

４．定理

補助定理１． (2) と (12) が成立するならば，(17) の $\tilde{x}_j$ と (21) の $\tilde{z}$ は主問題 (6)−(7) の実行可能解である．

証明． (13) を用い，(17) の $\tilde{x}_j$ と (21) の $\tilde{z}$ を制約条件 (7) の最初の２つの式に代入すると，(22) を考慮して

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\tilde{x}_j + \tilde{z} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{j+1,j} - a_{1j}} (b_{j+1} - b_1) + \tilde{z}$$

$$= b_1 \sum_{j=1}^{n} \theta_{j+1} - \sum_{j=1}^{n} \theta_{j+1} b_{j+1} + \tilde{z}$$

$$= \begin{cases} b_1 & (\tilde{e}_1 > 0 \text{ のとき}) \\ b_1 + 2\tilde{z} > b_1 & (\tilde{e}_1 < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\tilde{x}_j + \tilde{z} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{j+1,j} - a_{1j}} (b_{j+1} - b_1) + \tilde{z}$$

$$= -b_1 \sum_{j=1}^{n} \theta_{j+1} + \sum_{j=1}^{n} \theta_{j+1} b_{j+1} + \tilde{z}$$

$$= \begin{cases} -b_1 + 2\tilde{z} > -b_1 & (\tilde{e}_1 > 0 \text{ のとき}) \\ -b_1 & (\tilde{e}_1 < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．次に，(13) より

$$1 - \theta_i = \frac{a_{i,i-1}}{a_{i,i-1} - a_{1,i-1}} \qquad (i=2, \cdots, n+1)$$

であるから，これと (13)，(17) を用いると，(7) の $i=2, \cdots, n+1$ に対して

$$a_{i,i-1}\tilde{x}_{i-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i-1}}^{n} a_{1j}\tilde{x}_j + \tilde{z} = \frac{a_{i,i-1}}{a_{i,i-1} - a_{1,i-1}} (b_i - b_1) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i-1}}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{j+1,j} - a_{1j}} (b_{j+1} - b_1) + \tilde{z}$$

$$= (-1 + \sum_{j=1}^{n} \theta_{j+1})\, b_1 + b_i - \sum_{j=1}^{n} \theta_{j+1} b_{j+1} + \tilde{z}$$

となる．これに (21) の $\tilde{z}$ を用い，(22) を考慮すると，

$$a_{i,i-1}\tilde{x}_{i-1}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i-1}}^{n}a_{1j}\tilde{x}_j+\tilde{z}=\begin{cases}b_i & (\tilde{e}_1>0\text{ のとき})\\ b_i+2\tilde{z}>b_i & (\tilde{e}_1<0\text{ のとき})\end{cases}$$

が成立する．同様に，(13)，(17)，(21)より

$$-a_{i,i-1}\tilde{x}_{i-1}-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i-1}}^{n}a_{1j}\tilde{x}_j+\tilde{z}=(1-\sum_{j=1}^{n}\theta_{j+1})\,b_1-b_i+\sum_{j=1}^{n}\theta_{j+1}b_{j+1}+\tilde{z}$$

$$=\begin{cases}-b_i+2\tilde{z}>-b_i & (\tilde{e}_1>0\text{ のとき})\\ -b_i & (\tilde{e}_1<0\text{ のとき})\end{cases}$$

が成立する．以上の結果と (22) より，(17) の $\tilde{x}_j$ と (21) の $\tilde{z}$ は主問題の実行可能解である．　□

補助定理２．(2) と (12) が成立し，

(23)
$$\sum_{j=1}^{n}\theta_{j+1}<1$$

が成立すると仮定する．このとき，双対問題 (8)−(9) の実行可能解は，$\tilde{e}_1>0$ ならば，

(24-1)
$$\begin{aligned}&\tilde{u}_1=1-\sum_{j=1}^{n}\theta_{j+1}, && \tilde{v}_1=0\\ &\tilde{u}_i=\theta_i, && \tilde{v}_i=0 \qquad (i=2,\cdots,n+1)\end{aligned}$$

であり，$\tilde{e}_1<0$ ならば，

(24-2)
$$\begin{aligned}&\tilde{u}_1=0, && \tilde{v}_1=1-\sum_{j=1}^{n}\theta_{j+1}\\ &\tilde{u}_i=0, && \tilde{v}_i=\theta_i \qquad (i=2,\cdots,n+1)\end{aligned}$$

である．

証明．$\tilde{e}_1>0$ であるとき，(24-1) を制約条件 (9) に代入し，(13) を用いて整理すると，

$$\begin{aligned}&a_{j+1,j}(\tilde{u}_{j+1}-\tilde{v}_{j+1})+a_{1j}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j+1}}^{n+1}(\tilde{u}_i-\tilde{v}_i)\\ &=a_{j+1,j}\theta_{j+1}+a_{1j}\Big\{(1-\sum_{j=1}^{n}\theta_{j+1})+\sum_{\substack{i=2\\ i\neq j+1}}^{n+1}\theta_i\Big\}\\ &=a_{j+1,j}\theta_{j+1}+a_{1j}(1-\theta_{j+1})\\ &=0 \qquad (j=1,\cdots,n)\end{aligned}$$

となり，

$$\sum_{i=1}^{n+1}(\tilde{u}_i+\tilde{v}_i)=(1-\sum_{j=1}^{n}\theta_{j+1})+\theta_2+\cdots+\theta_{n+1}=1$$

となる．さらに，(24-1) の $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ は (14) と (23) よりすべて正かゼロである．したがって，$\tilde{e}_1>0$ であるとき，(24-1) は双対問題の実行可能解である．

同様に，$\tilde{e}_1<0$ であるときには (24-2) が双対問題の実行可能解である．　□

定理１．(2)，(12)，(23) が成立するならば，主問題 (6)−(7) の最適解は (17) の $\tilde{x}_j$ と (21) の $\tilde{z}$ であり，双対問題 (8)−(9) の最適解は (24) の $\tilde{u}_i$，$\tilde{v}_i$ である．

証明． 補助定理１より (17) の $\tilde{x}_j$ と (21) の $\tilde{z}$ は主問題の実行可能解であり，補助定理２より (24) の $\tilde{u}_i$，$\tilde{v}_i$ は双対問題の実行可能解である．このとき，$\tilde{e}_1 > 0$ ならば，(24-1) より双対問題の目的関数 (8) の値は，

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i(\tilde{u}_i - \tilde{v}_i) = \left(1 - \sum_{j=1}^{n} \theta_{j+1}\right) b_1 + \sum_{j=1}^{n} \theta_{j+1} b_{j+1} = \tilde{z}$$

であるから，主問題の目的関数 (6) の値である (21) に等しく，また $\tilde{e}_1 < 0$ ならば，(24-2) より

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i(\tilde{u}_i - \tilde{v}_i) = \left(-1 + \sum_{j=1}^{n} \theta_{j+1}\right) b_1 - \sum_{j=1}^{n} \theta_{j+1} b_{j+1} = \tilde{z}$$

であり，やはり主問題の目的関数の値 (21) に等しい．したがって，双対定理の１つ（Bertsimas and Tsitsiklis［１］, p. 148, Collatz and Wetterling［３］, p. 92, Cooper and Steinberg［４］, p. 162, Gale［５］, pp. 10–1, Krekó［６］, p. 193, Murty［７］, p. 191 など）によって結論をえる． □

定理１より(2), (12), (23) が成立するとき，主問題の最適解，すなわち (1) の Chebyshev 基準による近似解は，(16) と (17) からわかるように (3) の２番目以下の各式を１つずつ順に除いてできる n 次元単体の n 個の頂点の座標から生成される．

定理２． (1) が (2) と (12) を満たし，

(25)
$$a_{j+1,j} = -n a_{1j} \qquad (j=1, \cdots, n)$$

を満たすならば，Chebyshev 基準による近似解 (17) は (3) によってできる n 次元単体の重心と一致する．

証明． (25) が成立するとき，(13) は

$$\theta_{j+1} = \frac{a_{1j}}{a_{1j} - a_{j+1,j}} = \frac{a_{1j}}{a_{1j} + n a_{1j}} = \frac{1}{n+1} \qquad (j=1, \cdots, n)$$

であり，

$$1 - \sum_{j=1}^{n} \theta_{j+1} = \frac{1}{n+1}$$

であるから，(23) が満たされる．補助定理２の (24) より $\tilde{e}_1 > 0$ ならば，これらより

(26–1)
$$\tilde{u}_i = \theta_i = \frac{1}{n+1},\ \tilde{v}_i = 0 \qquad (i=1, \cdots, n+1)$$

であり，$\tilde{e}_1 < 0$ ならば，

(26–2)
$$\tilde{u}_i = 0,\ \tilde{v}_i = \theta_i = \frac{1}{n+1} \qquad (i=1, \cdots, n+1)$$

である．尾崎［８］の定理３において変数の数より方程式の数が１つ多い過剰決定の連立方程式の Chebyshev 基準による近似解は，これらの方程式によってできる n 次元単体の $n+1$ 個の頂点の座標を双対問題の最適解の各々で加重平均した値であることを明らかにした．ここでは，(3) の１番目の方程式を除いたときの単体の頂点の座標を求めていないけれども，(25) が成立するならば双対変数の最適な値は，(26) で示されるようにすべて $\frac{1}{(n+1)}$ に等しいから，Chebyshev 基準による近似解と n 次元単体の重心が一致する． □

５．数値例

例題１．(2) と (12) を満たす２変数，３個の過剰決定の連立方程式を

$$
\begin{aligned}
2x_1 \;+ x_2 &= 8 \\
-4x_1 \;+ x_2 &= 2 \\
2x_1 - 3x_2 &= 0
\end{aligned}
\tag{27}
$$

とする．(27) の２番目と３番目の方程式を１つずつ除いたときにえられる２次元単体(三角形)の２つの頂点の座標から適切に選んで定まる点が Chebyshev 基準による近似解であることを示す．

(13) の定義より

$$\theta_2 = \frac{a_{11}}{a_{11} - a_{21}} = \frac{2}{2+4} = \frac{1}{3},\ \theta_3 = \frac{a_{12}}{a_{12} - a_{32}} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

であり，

$$\theta_2 + \theta_3 < 1$$

であるから，補助定理２の (23) が成立している．このとき，(27) の２番目の方程式を除いた残りの方程式の解は，

$$
\begin{aligned}
2x_1^{(2)} + \;\; x_2^{(2)} &= 8 \\
2x_1^{(2)} - 3x_2^{(2)} &= 0
\end{aligned}
$$

より

$$x_1^{(2)} = 3,\ x_2^{(2)} = 2$$

である(これは第１図の点 B で示される)．同様に，(27) から３番目の方程式を除いた残りの方程式の解は，

$$
\begin{aligned}
2x_1^{(3)} + x_2^{(3)} &= 8 \\
-4x_1^{(3)} + x_2^{(3)} &= 2
\end{aligned}
$$

より

$$x_1^{(3)} = 1,\ x_2^{(3)} = 6$$

である(これは点 A で示される)．これらより (17) に基づいて定めた

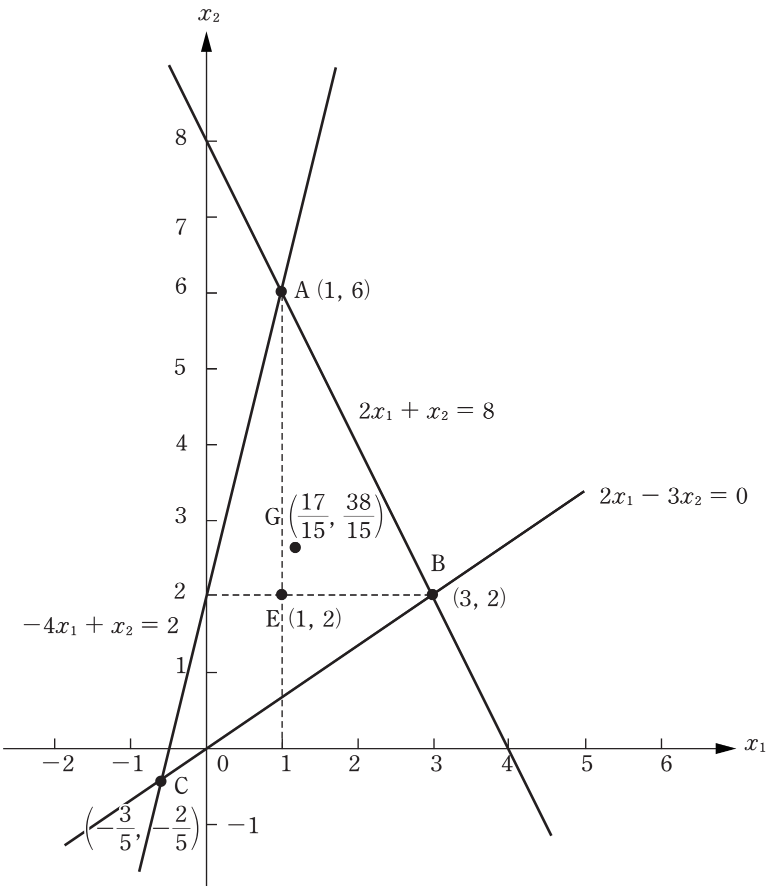
$$\tilde{x}_1 = x_1^{(3)} = \frac{b_2 - b_1}{a_{21} - a_{11}} = \frac{2-8}{-4-2} = 1,\ \tilde{x}_2 = x_2^{(2)} = \frac{b_3 - b_1}{a_{32} - a_{12}} = \frac{0-8}{-3-1} = 2 \tag{28}$$

が求める近似解である．第１図の点 E で示される (28) は，(27) の１番目と２番目の方程式の交点 A の x_1 座標に一致し，１番目と３番目の方程式の交点 B の x_2 座標に一致している．これより定理１が成立していることがわかる．なお，

$$\tilde{z} = \tilde{e}_1 = \tilde{e}_2 = \tilde{e}_3 = 4$$

である．

この場合，(25) は成立せず，Chebyshev 基準による近似解を示す点 E と三角形 ABC の重心 G $\left(\frac{17}{15}, \frac{38}{15}\right)$ は一致していない．



第１図

例題２．(2) と (12)，さらに (25) を満たす $n=2$ の場合の過剰決定の連立方程式を

$$
\begin{aligned}
2x_1 + \ \ x_2 &= 8 \\
-\,4x_1 + \ \ x_2 &= 2 \qquad (29) \\
2x_1 - 2x_2 &= 2
\end{aligned}
$$

とする(３番目の方程式を２で割ると別の近似解がえられるので，２で割ることはできない)．

(13) の定義より

$$\theta_2 = \frac{a_{11}}{a_{11} - a_{21}} = \frac{2}{2+4} = \frac{1}{3},\ \theta_3 = \frac{a_{12}}{a_{12} - a_{32}} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

であり，

$$\theta_2 + \theta_3 < 1$$

であるから，(23) が成立している．(29) の２番目の方程式を除いた残りの方程式の解は，

$$
\begin{aligned}
2x_1^{(2)} + \ \ x_2^{(2)} &= 8 \\
2x_1^{(2)} - 2x_2^{(2)} &= 2
\end{aligned}
$$

より

$$x_1^{(2)}=3,\ x_2^{(2)}=2$$

である(これは第 2 図の点 B で示される)．(29) から 3 番目の方程式を除いたときの解は,

$$2x_1^{(3)}+x_2^{(3)}=8$$
$$-4x_1^{(3)}+x_2^{(3)}=2$$

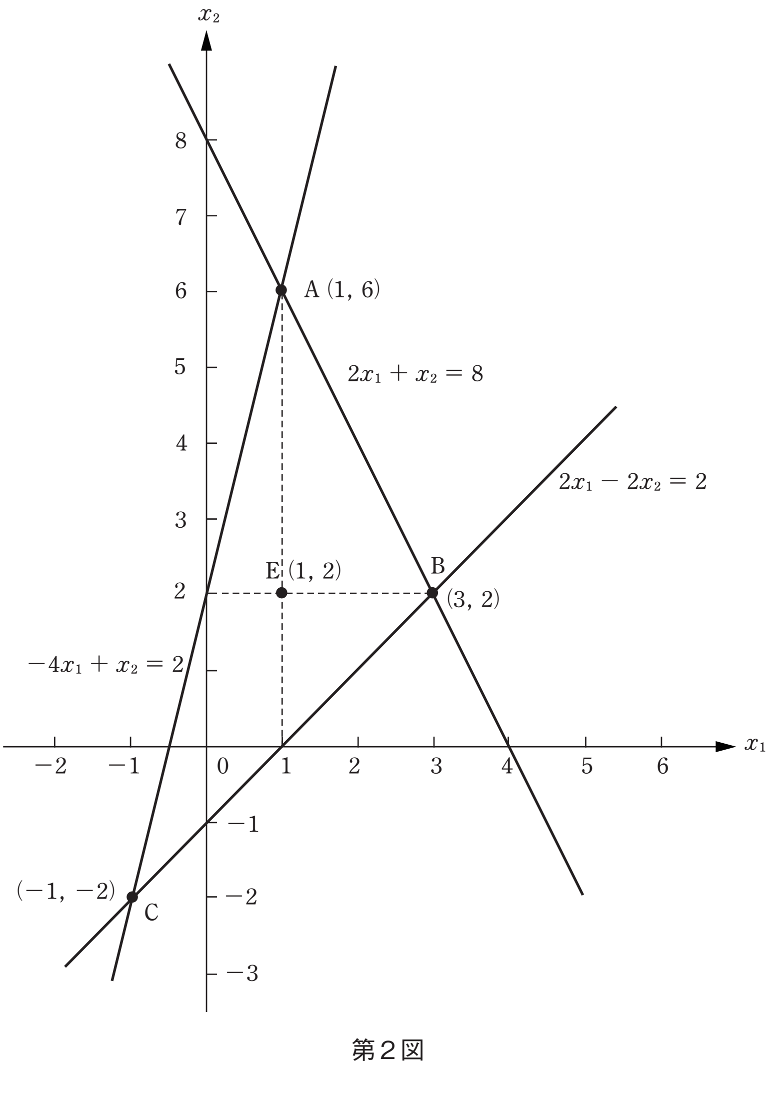
より

$$x_1^{(3)}=1,\ x_2^{(3)}=6$$

である(これは点 A で示される)．これらより (17) に基づいて定めた

(30) $$\tilde{x}_1=x_1^{(3)}=\frac{b_2-b_1}{a_{21}-a_{11}}=\frac{2-8}{-4-2}=1,\ \tilde{x}_2=x_2^{(2)}=\frac{b_3-b_1}{a_{32}-a_{12}}=\frac{2-8}{-2-1}=2$$

が求める近似解(点 E で示される)である．第 2 図で明らかなようにこの近似解の x_1 座標と x_2 座



第 2 図

標は，(29) によってできる２次元単体の頂点 A の x_1 座標と頂点 B の x_2 座標の各々に一致しており，定理１が確かめられる．また (25) が満たされるこの例題では，(29) の最初の式を除いてできる頂点の座標は，

$$\begin{aligned} -4x_1^{(1)} + \ \ x_2^{(1)} &= 2 \\ 2x_1^{(1)} - 2x_2^{(1)} &= 2 \end{aligned}$$

より

$$x_1^{(1)} = -1,\ x_2^{(1)} = -2$$

である (点 C で示される)．三角形 ABC の重心を (x_1^G, x_2^G) とすると，これらの頂点より

$$x_1^G = \frac{x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + x_1^{(3)}}{3} = \frac{-1+3+1}{3} = 1,\ x_2^G = \frac{x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + x_2^{(3)}}{3} = \frac{-2+2+6}{3} = 2$$

であるから，これらと (30) より

$$\tilde{x}_1 = x_1^G,\ \tilde{x}_2 = x_2^G$$

が成立し，Chebyshev 基準による近似解と三角形 ABC の重心が一致している．これより定理２が確認できる．

参考文献

［1］Bertsimas, D., and Tsitsiklis, J. N., *Introduction to Linear Optimization*. Belmont, Mass.: Athena Scientific, 1997.

［2］Cheney, E. W., *Introduction to Approximation Theory*. Second Edition, New York: Chelsea Publishing Co., 1982.

［3］Collatz, L., and Wetterling, W., *Optimizatization Prolbems*, trans. P. Wadsack. New York: Springer-Verlag, 1975.

［4］Cooper, L., and Steinberg, D., *Methods and Applications of Linear Programming*. Philadelphia, Penn.: W. B. Saunders Co., 1974.

［5］Gale, D., *The Theory of Linear Economic Models*. New York: McGraw-Hill Book Co., 1960.

［6］Krekó, B., *Linear Programming*, trans. J. H. L. Ahrens and C. M. Safe. London: Sir Isaac Pitman & Sons, 1968.

［7］Murty, K. G., *Linear Programming*. New York: John Wiley & Sons, 1983.

［8］尾崎雄一郎，「Chebyshev 近似のある基本的な定理とその応用」，『名城論叢』，第 10 巻，第 1 号（2009 年），pp. 33–50.

［9］Rabinowitz, P., "Applications of Linear Programming to Numerical Analysis," *SIAM Review*, Vol. 10 (1968), pp. 121–159.

［10］Rice, J. R., *The Approximation of Functions*, Vol. 1 — *Linear Theory*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1964.

［11］Rivlin, T. J., *An Introduction to the Approximation of Functions*. New York: Dover Publications, 1981.

［12］Stiefel, E., "Note on Jordan Elimination, Linear Programming and Tchebycheff Approximation," *Numerische Mathematik*, Vol. 2 (1960), pp. 1–17.

［13］Stiefel, E., "Methods — Old and New — for Solving the Tchebycheff Approximation Problem," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 1 (1964), pp. 164–176.

［14］Watson, G. A., *Approximation Theory and Numerical Methods*. New York: John Wiley & Sons, 1980.

［15］Zukhovitskiy, S. I., and Avdeyeva, L. I., *Linear and Convex Programming*, trans. Scripta Technica. Philadelphia, Penn.: W. B. Saunders Co., 1966.