

Chebyshev 近似のある基本的な定理とその応用

尾 崎 雄一郎

1. はじめに

過剰決定の線形連立方程式の近似解は、誤差の絶対値の和である L_1 ノルムを最小にする最小絶対値法、誤差の自乗和を最小にする最小自乗法、誤差の絶対値の中の最大値である L_∞ ノルムを最小にする Chebyshev 基準(ミニマックス法)などによって求めることができる. Chebyshev 基準による近似解はリニアール・プログラミングの問題に変換して解くことができ (Collatz and Wetterling [3], pp. 256-67, Rabinowitz [10], Rice [11], pp. 180-1, Rivlin [12], pp. 42-3, Stiefel [13], [14], Watson [15], pp. 39-40, Zukhovitskiy and Avdeyeva [16], pp. 190-207 など), またこのようにして解くのが効率的である.

本論文の目的は、過剰決定の $n+1$ 個の線形連立方程式の Chebyshev 基準による近似解がこれらの方程式によって決定される n 次元単体の各頂点の座標をこの双対問題の最適解で加重平均した値になるという基本的な定理を証明することと、この定理に基づいて Chebyshev 基準による近似解が n 次元単体の重心と一致するための必要十分条件を明らかにすることにある.

2. Chebyshev 近似のリニアール・プログラミングによる表示

方程式の数が変数の数より 1 個多い n 次元の過剰決定の連立方程式を

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n+1,1}x_1 & + & a_{n+1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n+1,n}x_n = b_{n+1} \end{array}$$

とし、(1) の i 番目の方程式の誤差 e_i を

$$(2) \quad e_i = b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) \quad (i=1, \cdots, n+1)$$

と定義する. (1) の Chebyshev 基準による近似解は、誤差の L_∞ ノルムである

$$\max_{i=1, \cdots, n+1} |e_i|$$

を最小にすることによって求められる. ここで、 z を

$$z = \max_{i=1, \cdots, n+1} |e_i|$$

と定義すると、すべての i に対して $z \geq |e_i|$ であるから、

$$z \geq e_i, z \geq -e_i \quad (i=1, \cdots, n+1), z \geq 0$$

が成立する. これらの式に (2) を代入して整理すると、Chebyshev 基準による近似解は、

(3)

 z

を次の制約条件の下で最小にする

$$(4) \quad \begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + z &\geq b_i \quad (i=1, \cdots, n+1) \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n + z &\geq -b_i \quad (i=1, \cdots, n+1) \\ z &\geq 0 \end{aligned}$$

というリニア・プログラミングの問題の最適解としてえられる。この主問題に対する双対問題は、

$$(5) \quad \sum_{i=1}^{n+1} b_i (u_i - v_i)$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$(6) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} a_{i1} (u_i - v_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n+1} a_{i2} (u_i - v_i) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n+1} a_{in} (u_i - v_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n+1} (u_i + v_i) &\leq 1 \\ u_i \geq 0, v_i \geq 0 \quad (i=1, \cdots, n+1) \end{aligned}$$

と表せる。

主問題 (3)–(4) と双対問題 (5)–(6) の各々に実行可能解が存在するので、双対定理の 1 つ (Collatz and Wetterling [3], p. 93, Cooper and Steinberg [4], p. 171, Gass [6], p. 162, Krekó [8], pp. 194–5 など) によって主問題と双対問題の各々に最適解が存在する。主問題の最適解を $\tilde{x}_i, \tilde{z}$, 双対問題の最適解を $\tilde{u}_i, \tilde{v}_i$ とする。このとき、もし $\tilde{z} = 0$ であるならば、(4) の不等式はすべて等号で成立し、(1) が過剰決であるという仮定に矛盾するから、

$$\tilde{z} > 0$$

でなければならない。このことより相補弛緩定理 (Bertsimas and Tsitsiklis [1], pp. 151–2, Chvátal [2], pp. 62–4, Collatz and Wetterling [3], pp. 92–3, Cooper and Steinberg [4], pp. 174–5, Gass [6], pp. 168–70, Hadley [7], pp. 239–41, Krekó [8], p. 196, Murty [9], pp. 197–8 など) によって双対問題の制約条件 (6) の $n+1$ 番目の不等式は等号で成立し、

$$(6') \quad \sum_{i=1}^{n+1} (\tilde{u}_i + \tilde{v}_i) = 1$$

となる。双対問題の最適解においてある i に対して同時に $\tilde{u}_i > 0, \tilde{v}_i > 0$ であるならば、(4) の対応する 1 組の不等式がともに等号で成立し、これらの等式を加えると、 $\tilde{z} = 0$ となって先の結果に矛盾する。したがって、 $\tilde{u}_i$ と $\tilde{v}_i$ はどの i についても同時に正となることはなく、

$$(7) \quad \tilde{u}_i \tilde{v}_i = 0 \quad (i=1, \cdots, n+1)$$

が成立しなければならない。

3. 双対問題の実行可能解

本節で、双対問題の実行可能解を示す。いま、 σ_i を ± 1 いずれかとし、

$$(8) \quad w_i = \begin{cases} u_i & (\sigma_i = 1 \text{ のとき}) \\ v_i & (\sigma_i = -1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (i=1, \dots, n+1)$$

と定める。(6'), (7), (8) より制約条件 (6) は、

$$(9) \quad \begin{aligned} a_{11}\sigma_1w_1 + a_{21}\sigma_2w_2 + \dots + a_{n+1,1}\sigma_{n+1}w_{n+1} &= 0 \\ a_{12}\sigma_1w_1 + a_{22}\sigma_2w_2 + \dots + a_{n+1,2}\sigma_{n+1}w_{n+1} &= 0 \\ \vdots & \\ a_{1n}\sigma_1w_1 + a_{2n}\sigma_2w_2 + \dots + a_{n+1,n}\sigma_{n+1}w_{n+1} &= 0 \\ w_1 + w_2 + \dots + w_{n+1} &= 1 \end{aligned}$$

と表せる。(9) の左辺の係数からなる行列式を

$$(10) \quad D = \begin{vmatrix} \sigma_1 a_{11} & \sigma_2 a_{21} & \dots & \sigma_{n+1} a_{n+1,1} \\ \sigma_1 a_{12} & \sigma_2 a_{22} & \dots & \sigma_{n+1} a_{n+1,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_1 a_{1n} & \sigma_2 a_{2n} & \dots & \sigma_{n+1} a_{n+1,n} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

とし、(1) の i 番目の方程式を除いたときの左辺の係数からなる行列式を

$$(11) \quad D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (i=1, \dots, n+1)$$

とする。以下において

$$(12) \quad \pi_i = \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1} \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{n+1} \quad (i=1, \dots, n+1)$$

と定める。(11) と (12) を用いて (10) を最後の行で展開すると、

$$(13) \quad D = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1+i} \pi_i D_i$$

となる。

(11) の $n+1$ 個の D_i に対して σ_1 から σ_{n+1} の各々を

$$(14) \quad \operatorname{sgn}(-1)^{n+2} \sigma_1 D_1 = \operatorname{sgn}(-1)^{n+3} \sigma_2 D_2 = \dots = \operatorname{sgn}(-1)^{2n+2} \pi_{n+1} D_{n+1} \neq 0$$

が成立するように定める。ここで、 $\operatorname{sgn}(-1)^{n+1+i} \sigma_i D_i$ は $(-1)^{n+1+i} \sigma_i D_i$ の符号を表し、 $(-1)^{n+1+i} \sigma_i D_i > 0$ ならば $\operatorname{sgn}(-1)^{n+1+i} \sigma_i D_i = 1$ 、 $(-1)^{n+1+i} \sigma_i D_i < 0$ ならば $\operatorname{sgn}(-1)^{n+1+i} \sigma_i D_i = -1$ とする。(14) に関する限り各項が 1 に等しくなるように各々の σ_i を定めることも、 -1 に等しくなるようにすることもできる。しかし、後の (18) の符号に関して述べるように、これらの値のいずれかでなければならない。(14) の各項に $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n+1}$ を掛け、任意の i に対して $\sigma_i^2 = 1$ であることに注意し、(12) を用いると、

$$(15) \quad \operatorname{sgn}(-1)^{n+2} \pi_1 D_1 = \operatorname{sgn}(-1)^{n+3} \pi_2 D_2 = \dots = \operatorname{sgn}(-1)^{2n+2} \pi_{n+1} D_{n+1} \neq 0$$

と表せる。(13) と (15) より $D \neq 0$ である。

Cramer のルールを用い, (11) に注意して (9) を解くと, その解は

$$(16) \quad \tilde{w}_i = \frac{(-1)^{n+1+i} \pi_i D_i}{D} \quad (i=1, \dots, n+1)$$

であり, (15) の各項が 1 であっても -1 であっても, (9), (13), (15), (16) より

$$(17) \quad 0 < \tilde{w}_i < 1 \quad (i=1, \dots, n+1), \quad \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{w}_i = 1$$

である. (16) より双対問題の目的関数 (5) の値は, (12) を考慮して

$$(18) \quad \sum_{i=1}^{n+1} b_i (\tilde{u}_i - \tilde{v}_i) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i \sigma_i \tilde{w}_i = \frac{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n+1}}{D} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1+i} b_i D_i$$

と表せる. (18) において $\sigma_i=1$ ならば $\sigma_i \tilde{w}_i = u_i$, $\sigma_i=-1$ ならば $\sigma_i \tilde{w}_i = -v_i$ である. 最適解に対する (18) の値は主問題の目的関数 (3) の値 $\bar{z}$ に等しく, $\bar{z} > 0$ であるから,

$$(19) \quad \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1+i} b_i D_i \neq 0$$

でなければならない. 既に述べたように, すべての $\tilde{w}_i$ は正であるから, (18) の 2 番目の式においてもし $\sum b_i \sigma_i \tilde{w}_i < 0$ であるならば, $\sigma_i = 1$ であるものは $\sigma'_i = -1$ とし, $\sigma_i = -1$ であるものは $\sigma'_i = 1$ としてすべての σ_i の符号を逆にすれば,

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i \sigma'_i \tilde{w}_i = - \sum_{i=1}^{n+1} b_i \sigma_i \tilde{w}_i > 0$$

とすることができる. このようにすべての σ_i を (18) の値が正になるように決定する.

4. 主問題の実行可能解

本節で, 主問題の実行可能解を求める. (11) の D_i から第 h 行, 第 j 列を除いた小行列式を $D_i(h, j)$ と表す. このとき, 次の補助定理が成り立つ.

補助定理 1. (11) より任意の $i=1, \dots, n+1; h, j=1, \dots, n$ に対して

$$(20) \quad D_i(h, j) = \begin{cases} D_h(i-1, j) & (h < i \text{ であるとき}) \\ D_{h+1}(i, j) & (h \geq i \text{ であるとき}) \end{cases}$$

が成立する.

証明. 任意の $j=1, \dots, n$ に対して

$$D_1(h, j) = D_{n+1}(1, j) \quad (h=1, \dots, n)$$

$$D_2(h, j) = \begin{cases} D_h(1, j) & (h=1) \\ D_{h+1}(2, j) & (h=2, \dots, n) \end{cases}$$

.....

$$D_n(h, j) = \begin{cases} D_h(n-1, j) & (h=1, \dots, n-1) \\ D_{h+1}(n, j) & (h=n) \end{cases}$$

$$D_{n+1}(h, j) = D_h(n, j) \quad (h=1, \dots, n)$$

である。これらより (20) が成立する。 $\square$

(17) よりすべての i に対して $\tilde{w}_i > 0$ であるから, (8) において $\sigma_i = 1$ で $\tilde{w}_i = \tilde{u}_i > 0$ である i に対しては相補弛緩定理より主問題の制約条件 (4) の最初の不等式が等号で成立し, $\sigma_i = -1$ で $\tilde{w}_i = \tilde{v}_i > 0$ である i に対しては (4) の 2 番目の不等式が等号で成立する。これらより制約条件 (4) は,

$$(21) \quad \begin{array}{ccccccc} \sigma_1 a_{11} \tilde{x}_1 & + & \sigma_1 a_{12} \tilde{x}_2 & + & \cdots & + & \sigma_1 a_{1n} \tilde{x}_n + \tilde{z} = & \sigma_1 b_1 \\ \sigma_2 a_{21} \tilde{x}_1 & + & \sigma_2 a_{22} \tilde{x}_2 & + & \cdots & + & \sigma_2 a_{2n} \tilde{x}_n + \tilde{z} = & \sigma_2 b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\ \sigma_{n+1} a_{n+1,1} \tilde{x}_1 & + & \sigma_{n+1} a_{n+1,2} \tilde{x}_2 & + & \cdots & + & \sigma_{n+1} a_{n+1,n} \tilde{x}_n + \tilde{z} = & \sigma_{n+1} b_{n+1} \end{array}$$

と表せる。Cramer のルールと (10) を用いて (21) を解くと, $j = 1, \dots, n$ に対して

$$\tilde{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+j} \sigma_i b_i}{D} \begin{vmatrix} \sigma_1 a_{11} & \cdots & \sigma_1 a_{1,j-1} & \sigma_1 a_{1,j+1} & \cdots & \sigma_1 a_{1n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sigma_{i-1} a_{i-1,1} & \cdots & \sigma_{i-1} a_{i-1,j-1} & \sigma_{i-1} a_{i-1,j+1} & \cdots & \sigma_{i-1} a_{i-1,n} & 1 \\ \sigma_{i+1} a_{i+1,1} & \cdots & \sigma_{i+1} a_{i+1,j-1} & \sigma_{i+1} a_{i+1,j+1} & \cdots & \sigma_{i+1} a_{i+1,n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n+1} a_{n+1,1} & \cdots & \sigma_{n+1} a_{n+1,j-1} & \sigma_{n+1} a_{n+1,j+1} & \cdots & \sigma_{n+1} a_{n+1,n} & 1 \end{vmatrix}$$

となる。この行列式を (11) と (12) を用いて最後の列で展開すると,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j = & \frac{(-1)^{j+1} b_1}{D} \left\{ (-1)^{n+1} \pi_2 D_1(1, j) + (-1)^{n+2} \pi_3 D_1(2, j) + \cdots + (-1)^{2n} \pi_{n+1} D_1(n, j) \right\} \\ & + \frac{(-1)^{j+2} b_2}{D} \left\{ (-1)^{n+1} \pi_1 D_2(1, j) + (-1)^{n+2} \pi_3 D_2(2, j) + \cdots + (-1)^{2n} \pi_{n+1} D_2(n, j) \right\} \\ & \dots \dots \dots \\ & + \frac{(-1)^{j+n+1} b_{n+1}}{D} \left\{ (-1)^{n+1} \pi_1 D_{n+1}(1, j) + (-1)^{n+2} \pi_2 D_{n+1}(2, j) + \cdots + (-1)^{2n} \pi_n D_{n+1}(n, j) \right\} \end{aligned}$$

となり, さらに補助定理 1 の (20) を用いると,

$$(22) \quad \begin{aligned} \tilde{x}_j = & \frac{(-1)^{j+1} b_1}{D} \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{n+i-1} \pi_i D_i(1, j) \\ & + \frac{(-1)^{j+2} b_2}{D} \left\{ (-1)^{n+1} \pi_1 D_1(1, j) + \sum_{i=3}^{n+1} (-1)^{n-1+i} \pi_i D_i(2, j) \right\} \\ & \dots \dots \dots \\ & + \frac{(-1)^{j+n+1} b_{n+1}}{D} \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \pi_i D_i(n, j) \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

となる。同様に, (21) より

$$\tilde{z} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \sigma_1 a_{11} & \sigma_1 a_{12} & \cdots & \sigma_1 a_{1n} & \sigma_1 b_1 \\ \sigma_2 a_{21} & \sigma_2 a_{22} & \cdots & \sigma_2 a_{2n} & \sigma_2 b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n+1} a_{n+1,1} & \sigma_{n+1} a_{n+1,2} & \cdots & \sigma_{n+1} a_{n+1,n} & \sigma_{n+1} b_{n+1} \end{vmatrix}$$

であるから、この行列式を最後の列で展開すると、

$$\tilde{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1+i} \sigma_i b_i}{D} \begin{vmatrix} \sigma_1 a_{11} & \sigma_1 a_{12} & \cdots & \sigma_1 a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{i-1} a_{i-1,1} & \sigma_{i-1} a_{i-1,2} & \cdots & \sigma_{i-1} a_{i-1,n} \\ \sigma_{i+1} a_{i+1,1} & \sigma_{i+1} a_{i+1,2} & \cdots & \sigma_{i+1} a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n+1} a_{n+1,1} & \sigma_{n+1} a_{n+1,2} & \cdots & \sigma_{n+1} a_{n+1,n} \end{vmatrix}$$

となる。これより (11) を用いて

$$(23) \quad \tilde{z} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n+1}}{D} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1+i} b_i D_i$$

と表せる。

5. Chebyshev 基準による近似解

第3節と第4節の結果より次の定理をえる。

定理1. 過剰決定の連立方程式 (1) において (11) の $D_i \neq 0$ が成立するとき、主問題 (3)–(4) の最適解は (22) の $\tilde{x}_j$ と (23) の $\tilde{z}$ であり、双対問題 (5)–(6) の最適解は (16) の $\tilde{w}_i$ である。

証明. (22) の $\tilde{x}_j$ と (23) の $\tilde{z}$ が主問題の制約条件 (4) あるいは (21) の実行可能解であることと、(16) の $\tilde{w}_i$ が双対問題の制約条件 (6) あるいは (9) の実行可能解であることは既に示した。これらの実行可能解に対して主問題の目的関数 (3) の値と双対問題の目的関数 (5) の値は、(18) と (23) より

$$(24) \quad \tilde{z} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n+1}}{D} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1+i} b_i D_i = \sum_{i=1}^{n+1} b_i \sigma_i \tilde{w}_i > 0$$

であるから等しい。したがって、双対定理の1つ (Bertsimas and Tsitsiklis [1], p. 148, Collatz and Wetterling [3], p. 92, Cooper and Steinberg [4], p. 162, Hadley [7], p. 228, Kreló [8], p. 193, Murty [9], p. 193 など) によって結論をえる。□

定理2. (11) の $D_i \neq 0$ が成立するとき、主問題 (3)–(4) の最適解である (22) の $\tilde{x}_j$ は一意である。

証明. 双対問題 (5)–(6) の最適解である (16) の $\tilde{w}_i$ は、(17) で示されるように、すべて正であるから双対問題の最適解は退化せず、したがって主問題の最適解は一意である (Chvátal [2], p. 65, Dantzig and Thapa [5], p. 73, Murty [9], p. 140 など)。□

6. Chebyshev 基準による近似解と n 次元単体の頂点との関連

最初に、(1) によってできる n 次元単体の $n+1$ 個の頂点の座標を求める。(1) から i 番目の方程式を除いた連立方程式を

$$\begin{aligned}
& a_{11}x_1^{(i)} + a_{12}x_2^{(i)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(i)} = b_1 \\
& \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
(25) \quad & a_{i-1,1}x_1^{(i)} + a_{i-1,2}x_2^{(i)} + \cdots + a_{i-1,n}x_n^{(i)} = b_{i-1} \quad (i=1, \dots, n+1) \\
& a_{i+1,1}x_1^{(i)} + a_{i+1,2}x_2^{(i)} + \cdots + a_{i+1,n}x_n^{(i)} = b_{i+1} \\
& \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
& a_{n+1,1}x_1^{(i)} + a_{n+1,2}x_2^{(i)} + \cdots + a_{n+1,n}x_n^{(i)} = b_{n+1}
\end{aligned}$$

と表す. (25) の解 $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ は (1) によってできる n 次元単体の $n+1$ 個の頂点の座標である. (25) を Cramer のルールを用いて解くと,

$$(26) \quad x_j^{(i)} = \frac{1}{D_i} \left\{ \sum_{h=1}^{i-1} (-1)^{j+h} b_h D_i(h, j) + \sum_{h=i}^n (-1)^{j+h} b_{h+1} D_i(h, j) \right\} \quad (i=1, \dots, n+1; j=1, \dots, n)$$

である. このとき, 次の基本的な定理をえる.

定理 3. (16) の $\tilde{w}_i$, (22) の $\tilde{x}_j$, (26) の $x_j^{(i)}$ に対して

$$(27) \quad \tilde{x}_j = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{w}_i x_j^{(i)} \quad (j=1, \dots, n)$$

が成立する.

証明. (16) の $\tilde{w}_i$ と (26) の $x_j^{(i)}$ を用いると,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \tilde{w}_i x_j^{(i)} &= \frac{(-1)^{n+2} \pi_1}{D} \sum_{h=1}^n (-1)^{j+h} b_{h+1} D_1(h, j) + \frac{(-1)^{n+3} \pi_2}{D} \left\{ (-1)^{j+1} b_1 D_2(1, j) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{h=2}^n (-1)^{j+h} b_{h+1} D_2(h, j) \right\} + \dots \dots \dots \\
&\quad + \frac{(-1)^{2n+2} \pi_{n+1}}{D} \sum_{h=1}^n (-1)^{j+h} b_h D_{n+1}(h, j) \quad (j=1, \dots, n)
\end{aligned}$$

となる. この式の右辺を b_i で整理すると,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \tilde{w}_i x_j^{(i)} &= \frac{(-1)^{j+1} b_1}{D} \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{n+1+i} \pi_i D_i(1, j) \\
&\quad + \frac{(-1)^{j+2} b_2}{D} \left\{ (-1)^{n+1} \pi_1 D_1(1, j) + \sum_{i=3}^{n+1} (-1)^{n+1+i} \pi_i D_i(2, j) \right\} + \dots \dots \dots \\
&\quad + \frac{(-1)^{j+n+1} b_{n+1}}{D} \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \pi_i D_i(n, j)
\end{aligned}$$

となる. これと (22) を比較すれば, (27) が成立する. □

定理 3 より Chebyshev 基準による近似解 (22) は, (1) によってできる n 次元単体の $n+1$ 個の各々の頂点を対応する最適な双対変数の値によって加重平均した値に等しいことがわかる.

7. Chebyshev 基準による近似解と n 次元単体の重心が一致するための必要十分条件

Chebyshev 基準による近似解 (22) に対する誤差を $\tilde{e}_i$ とすると, (2) と (21) より

$$\tilde{z} = \sigma_1 \tilde{e}_1 = \sigma_2 \tilde{e}_2 = \cdots = \sigma_{n+1} \tilde{e}_{n+1} > 0$$

であるから,

$$\sigma_i \tilde{e}_i = \sigma_1 \tilde{e}_1 \quad (i=1, \cdots, n+1)$$

である(これらの σ_i はすべて (14) あるいは (18) の σ_i と同じである). これらの $\tilde{e}_i$ に (2) の定義を用いて整理すると,

$$(28) \quad \sum_{j=1}^n (\sigma_i a_{ij} - \sigma_1 a_{1j}) \tilde{x}_j = \sigma_i b_i - \sigma_1 b_1 \quad (i = 2, \cdots, n+1)$$

と表せる.

次の補助定理を用いて以下の考察を進める.

補助定理2. (11) の D_i を D_h と表し, この D_h を $1 \leq i \leq h-1$ である第 i 行で展開すると,

$$(29-1) \quad D_h = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D_h(i, j) \quad (i=1, \cdots, h-1)$$

であり, $h+1 \leq i \leq n$ である第 i 行で展開すると,

$$(29-2) \quad D_h = \sum_{j=1}^n (-1)^{i-1+j} a_{ij} D_h(i-1, j) \quad (i = h+1, \cdots, n)$$

が成立する.

証明. (11) と同じ行列式 D_h を任意の第 i 行で展開すると, 結論をえる. □

(26) の $x_j^{(i)}$ は, 補助定理1の(20)を用いて書き直すと,

$$x_j^{(i)} = \frac{1}{D_i} \left\{ \sum_{h=1}^{i-1} (-1)^{j+h} b_h D_h(i-1, j) + \sum_{h=i}^n (-1)^{j+h} b_{h+1} D_{h+1}(i, j) \right\}$$

と表せるから, これより

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(i)} &= \frac{1}{D_i} \left[\sum_{h=1}^{i-1} (-1)^{h-i+1} b_h \left\{ \sum_{j=1}^n (-1)^{i-1+j} a_{ij} D_h(i-1, j) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{h=i}^n (-1)^{h-i} b_{h+1} \left\{ \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D_{h+1}(i, j) \right\} \right] \end{aligned}$$

となり, 補助定理2の(29)より上式の各々の中括弧は D_h と D_{h+1} に等しいので, 上式は

$$(30) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(i)} = \frac{1}{D_i} \left\{ \sum_{h=1}^{i-1} (-1)^{h-i+1} b_h D_h + \sum_{h=i}^n (-1)^{h-i} b_{h+1} D_{h+1} \right\} \quad (i=1, \cdots, n+1)$$

と表せる. 他方, (1) から i 番目の方程式を除いた(25)によってできる n 次元単体の重心を $(x_1^G, \cdots, x_n^G)$ と表すと, 重心の座標は

$$(31) \quad x_j^G = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_j^{(i)} \quad (j = 1, \cdots, n)$$

である.

(31) で表される重心と (22) で表される Chebyshev 基準による近似解とが一致するための必要条件を求める. そのため

$$(32) \quad x_j^G = \tilde{x}_j \quad (j = 1, \cdots, n)$$

が成立すると仮定する. このとき, (31) と (25) より

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^G &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^{n+1} a_{ij} x_j^{(h)} \\
&= \frac{1}{n+1} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(1)} + \cdots + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(i)} + \cdots + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(n+1)} \right\} \\
&= \frac{1}{n+1} \left\{ b_i + \cdots + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(i)} + \cdots + b_i \right\} \quad (i=1, \dots, n+1)
\end{aligned}$$

であるから,

$$(33) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^G = \frac{1}{n+1} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(i)} + nb_i \right\} \quad (i=1, \dots, n+1)$$

となる. (33) に (30) を代入すると,

$$(34-1) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^G = \frac{1}{(n+1)D_i} \left\{ \sum_{h=1}^{i-1} (-1)^{h-i+1} b_h D_h + \sum_{h=i}^n (-1)^{h-i} b_{h+1} D_{h+1} + nb_i D_i \right\} \\ (i=1, \dots, n+1)$$

をえる. (34-1) において $i=1$ とすると,

$$(34-2) \quad \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j^G = \frac{1}{(n+1)D_1} \left\{ \sum_{h=1}^n (-1)^{h-1} b_{h+1} D_{h+1} + nb_1 D_1 \right\}$$

となり, (32) を考慮し, (34-1) と (34-2) を (28) に代入すると,

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma_i}{(n+1)D_i} \left\{ \sum_{h=1}^{i-1} (-1)^{h-i+1} b_h D_h + \sum_{h=i}^n (-1)^{h-i} b_{h+1} D_{h+1} + nb_i D_i \right\} \\
&\quad - \frac{\sigma_1}{(n+1)D_1} \left\{ \sum_{h=1}^n (-1)^{h-1} b_{h+1} D_{h+1} + nb_1 D_1 \right\} = \sigma_i b_i - \sigma_1 b_1 \quad (i=2, \dots, n+1)
\end{aligned}$$

となる. この右辺を左辺に移項して整理すると,

$$(35) \quad \frac{\sigma_i}{D_i} \left\{ \sum_{h=1}^{i-1} (-1)^{h-i+1} b_h D_h - b_i D_i + \sum_{h=i}^n (-1)^{h-i} b_{h+1} D_{h+1} \right\} \\ - \frac{\sigma_1}{D_1} \left\{ -b_1 D_1 + \sum_{h=1}^n (-1)^{h-1} b_{h+1} D_{h+1} \right\} = 0 \quad (i=2, \dots, n+1)$$

となり, (35) において i が奇数であるならば,

$$(36-1) \quad \frac{(\sigma_i D_1 - \sigma_1 D_i)}{D_1 D_i} \sum_{h=1}^{n+1} (-1)^{h-2} b_h D_h = 0$$

と表せ, i が偶数であるならば,

$$(36-2) \quad \frac{(\sigma_i D_1 + \sigma_1 D_i)}{D_1 D_i} \sum_{h=1}^{n+1} (-1)^{h-1} b_h D_h = 0$$

と表せる. (36-1) と (36-2) 各々の積の第 2 項は (19) よりゼロではない. したがって, (36-1) と (36-2) より

$$(37) \quad D_i = \begin{cases} \frac{\sigma_i}{\sigma_1} D_1 & (i \text{ が奇数であるとき}) \\ -\frac{\sigma_i}{\sigma_1} D_1 & (i \text{ が偶数であるとき}) \end{cases}$$

が成立しなければならない. (8) の定義よりすべての σ_i は 1 か -1 のいずれかであるから, (37) は

$$(38) \quad |D_i| = |D_1| \quad (i=2, \dots, n+1)$$

と同値である. したがって, (37) あるいは (38) は (31) が成立するための必要条件である.

次に, (37) は (31) が成立するための十分条件であることを証明する. (37) が成立すると仮定する. (12) を用いて (13) の行列式 D は, n が奇数であるならば,

$$(39-1) \quad \begin{aligned} D &= (-1)^{n+2} \pi_1 D_1 + (-1)^{n+3} \pi_2 \left(-\frac{\sigma_2}{\sigma_1} D_1 \right) + \cdots + (-1)^{2n+2} \pi_{n+1} \left(-\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_1} D_1 \right) \\ &= -\frac{(n+1) \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n+1} D_1}{\sigma_1} = -(n+1) \pi_1 D_1 \end{aligned}$$

となり, n が偶数であるならば,

$$(39-2) \quad \begin{aligned} D &= (-1)^{n+2} \pi_1 D_1 + (-1)^{n+3} \pi_2 \left(-\frac{\sigma_2}{\sigma_1} D_1 \right) + \cdots + (-1)^{2n+2} \pi_{n+1} \left(\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_1} D_1 \right) \\ &= \frac{(n+1) \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n+1} D_1}{\sigma_1} = (n+1) \pi_1 D_1 \end{aligned}$$

となる. (16) の $\bar{w}_i$ は, n と i が奇数であるとき, (12), (37), (39-1) を用いて

$$\bar{w}_i = \frac{(-1)^{n+1+i} \pi_i D_i}{D} = \frac{-\pi_i \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_1} D_1 \right)}{-(n+1) \pi_1 D_1} = \frac{1}{n+1}$$

となり, 同様に n が奇数で, i が偶数であるときなど他の場合についても $\bar{w}_i$ はすべて $1/(n+1)$ に等しくなるので,

$$(40) \quad \bar{w}_i = \frac{1}{n+1} \quad (i=1, \cdots, n+1)$$

である. したがって, (27), (31), (40) より

$$\tilde{x}_j = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_j^{(i)} = x_j^G \quad (j=1, \cdots, n)$$

が成立し, これより (32) が成立する. したがって, (37) は (31) が成立するための十分条件でもある. 以上より次の定理が成立する.

定理 4. Chebyshev 基準による近似解 (22) と (1) によってできる n 次元単体の重心 (31) が一致するための必要十分条件は, (37) あるいは (38) が成立することである.

(37) と (39) より (23) の $\bar{z}$ の値は, n が奇数であるとき,

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n+1}}{D} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1+i} b_i D_i \\ &= \frac{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n+1}}{-(n+1) \pi_1 D_1} \left\{ -b_1 D_1 + b_2 \left(-\frac{\sigma_2}{\sigma_1} D_1 \right) + \cdots + b_{n+1} \left(-\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_1} D_1 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i b_i \end{aligned}$$

となり, n が偶数であるときもこれと同じ結果をえる. したがって, このとき

$$\bar{z} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i b_i$$

となる.

8. 別の必要十分条件

本節で, Chebyshev 基準による近似解と n 次元単体の重心が一致するための第2の必要十分条件を与える.

定理5. (37) が成立するための必要十分条件は,

$$(41) \quad \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i a_{ij} = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

が成立することである.

証明. (41) が成立すると仮定する. (11) の D_i は,

$$D_i = \frac{1}{\sigma_1} \begin{vmatrix} \sigma_1 a_{11} & \sigma_1 a_{12} & \cdots & \sigma_1 a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix} \quad (i = 1, \dots, n+1)$$

と表せる. この行列式の第2行に σ_2 を掛け, 以下同様にして最後の行に σ_{n+1} を掛け, これらの結果を第1行に加えても行列式の値は変わらないから,

$$D_i = \frac{1}{\sigma_1} \begin{vmatrix} \sigma_1 a_{11} + \sum_{\substack{h=2 \\ h \neq i}}^{n+1} \sigma_h a_{h1} & \sigma_1 a_{12} + \sum_{\substack{h=2 \\ h \neq i}}^{n+1} \sigma_h a_{h2} & \cdots & \sigma_1 a_{1n} + \sum_{\substack{h=2 \\ h \neq i}}^{n+1} \sigma_h a_{hn} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix}$$

となる. この第1行に (41) を用い, 整理すると,

$$D_i = -\frac{\sigma_i}{\sigma_1} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix}$$

となり, この第1行を第2行以下, 第 $i-1$ 行まで順次入れ替え, (11) を用いると,

$$D_i = \frac{(-1)^{i-1} \sigma_i D_1}{\sigma_1} \quad (i = 2, \dots, n+1)$$

となり, これより (37) をえる.

逆に, (37) が成立すると仮定する. このとき, i が奇数であるならば, $D_i - (\sigma_i/\sigma_1)D_1 = 0$ が成立するから, これより

$$D_i - \frac{\sigma_i}{\sigma_1}D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix} - \frac{\sigma_i}{\sigma_1} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix} = 0$$

となる. 最初の行列式の第1行を第2行以下, 第 $i-1$ 行まで順次入れ替えると,

$$(-1)^{i-2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix} - \frac{\sigma_i}{\sigma_1} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix} = 0$$

となり, これら2つの行列式は第 i 行のみが異なり, i は奇数であるから,

$$(-1) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{11} + \frac{\sigma_i}{\sigma_1}a_{i1} & a_{12} + \frac{\sigma_i}{\sigma_1}a_{i2} & \cdots & a_{1n} + \frac{\sigma_i}{\sigma_1}a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix} = 0$$

となる. この結果より上の行列式の各行(各列)は一次従属である. したがって,

$$(42) \quad \begin{aligned} a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + \cdots + a_{n+1,1}y_{n+1} &= a_{11} \\ a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + \cdots + a_{n+1,2}y_{n+1} &= a_{12} \\ \vdots & \\ a_{2n}y_2 + a_{3n}y_3 + \cdots + a_{n+1,n}y_{n+1} &= a_{1n} \end{aligned}$$

は解をもつ. (42) を Cramer のルールを用いて解き, その分子の行列式の中の列 $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})'$ を第1列まで順次入れ替えると, $y_i = (-1)^{i-2}D_i/D_1$ となる. 同様に, (37) が成立し, i が偶数であるときには, $D_i + (\sigma_i/\sigma_1)D_1 = 0$ より同じく (42) をえ, $y_i = (-1)^{i-2}D_i/D_1$ をえる. したがって, これらより

$$(43) \quad y_i = \frac{(-1)^{i-2}D_i}{D_1} \quad (i = 2, \dots, n+1)$$

をえる. (37) と (43) より i が奇数であるときには,

$$(44-1) \quad y_i = -\frac{D_i}{D_1} = -\frac{1}{D_1} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_1} D_1 \right) = -\frac{\sigma_i}{\sigma_1}$$

となり, i が偶数であるときにも同じく

$$(44-2) \quad y_i = \frac{D_i}{D_1} = \frac{1}{D_1} \left(-\frac{\sigma_i}{\sigma_1} D_1 \right) = -\frac{\sigma_i}{\sigma_1}$$

となる. (44) を (42) に代入し, 整理すると, (41) をえる. □

定理 4 と 5 より次の定理をえる.

定理 6. Chebyshev 基準による近似解 (22) と (1) によってできる n 次元単体の重心が一致するための必要十分条件は (41) が成立することである.

9. 数値例

本節で, Chebyshev 基準による近似解が 2 次元単体の頂点を双対問題の最適解で加重平均したものであることと, その近似解が 2 次元単体の重心と一致しない数値例と一致する数値例を示す.

例題 1. 過剰決定の連立方程式を

$$(45) \quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 &= 24 \end{aligned}$$

とする.

(45) の各々の誤差 e_i を

$$e_1 = 3 - 2x_1 + x_2, \quad e_2 = x_1 - 2x_2, \quad e_3 = 24 - x_1 - 4x_2$$

とし,

$$z = \max(|e_1|, |e_2|, |e_3|)$$

とすると, Chebyshev 基準による近似解は,

$$z$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + z &\geq 3, & -2x_1 + x_2 + z &\geq -3 \\ -x_1 + 2x_2 + z &\geq 0, & x_1 - 2x_2 + z &\geq 0 \\ x_1 + 4x_2 + z &\geq 24, & -x_1 - 4x_2 + z &\geq -24 \\ & & z &\geq 0 \end{aligned}$$

という問題の最適解としてえられる. この双対問題は,

$$3(u_1 - v_1) + 24(u_3 - v_3)$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$\begin{aligned} 2(u_1 - v_1) - (u_2 - v_2) + (u_3 - v_3) &= 0 \\ -(u_1 - v_1) + 2(u_2 - v_2) + 4(u_3 - v_3) &= 0 \\ u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + u_3 + v_3 &\leq 1 \\ u_i \geq 0, v_i \geq 0 \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned}$$

と表せる.

主問題の最適解は,

$$(46) \quad \tilde{x}_1 = 5, \tilde{x}_2 = 4, \tilde{z} = 3$$

であり, これは第1図の点Eで示される. 双対問題の最適解は,

$$(47) \quad \bar{w}_1 = \bar{v}_1 = \frac{1}{3}, \bar{w}_2 = \bar{v}_2 = \frac{1}{2}, \bar{w}_3 = \bar{u}_3 = \frac{1}{6}$$

である(他の双対変数はすべてゼロである). 次に, (45)によってできる2次元単体の頂点を求める.

(45)の1番目の式を除いたときの他の2直線の交点の座標は,

$$\begin{aligned} -x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} &= 0 \\ x_1^{(1)} + 4x_2^{(1)} &= 24 \end{aligned}$$

より

$$(48-1) \quad x_1^{(1)} = 8, x_2^{(1)} = 4$$

であり, これは点Aで示される. (45)の2番目の式を除いたときの他の2直線の交点の座標は,

$$\begin{aligned} 2x_1^{(2)} - x_2^{(2)} &= 3 \\ x_1^{(2)} + 4x_2^{(2)} &= 24 \end{aligned}$$

より

$$(48-2) \quad x_1^{(2)} = 4, x_2^{(2)} = 5$$

であり, これは点Bで示される. 最後に, 3番目の式を除いたときの2直線の交点の座標は,

$$\begin{aligned} 2x_1^{(3)} - x_2^{(3)} &= 3 \\ -x_1^{(3)} + 2x_2^{(3)} &= 0 \end{aligned}$$

より

$$(48-3) \quad x_1^{(3)} = 2, x_2^{(3)} = 1$$

であり, これは点Cで示される. (46), (47), (48)より

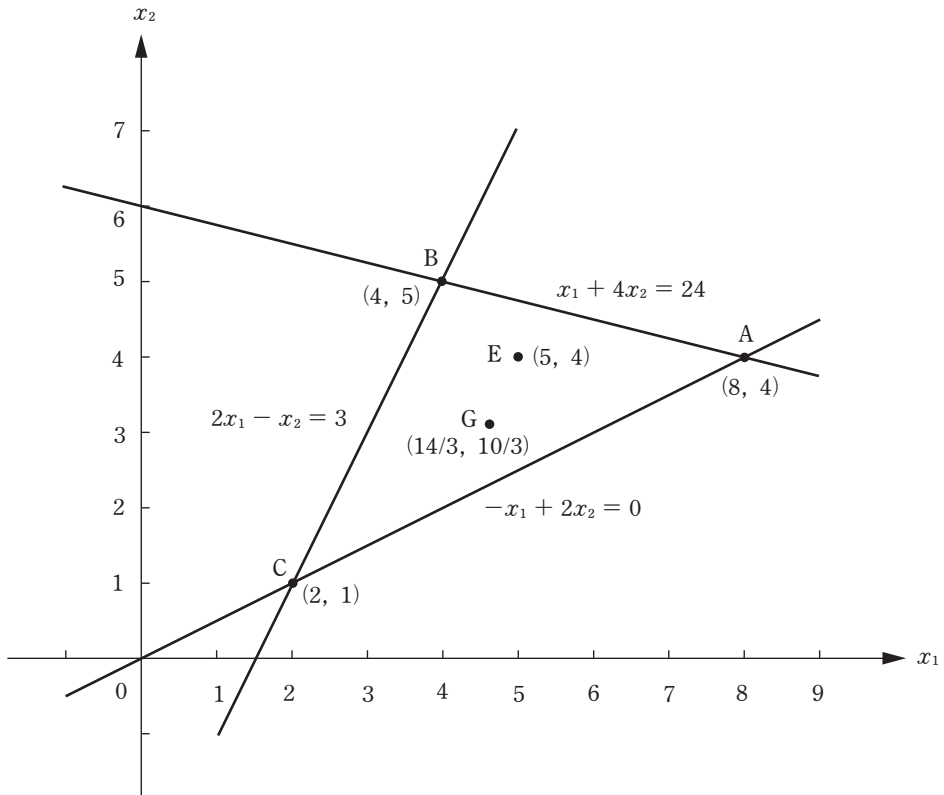
$$\begin{aligned} \bar{w}_1 x_1^{(1)} + \bar{w}_2 x_1^{(2)} + \bar{w}_3 x_1^{(3)} &= \frac{1}{3} \times 8 + \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{6} \times 2 = 5 = \tilde{x}_1 \\ \bar{w}_1 x_2^{(1)} + \bar{w}_2 x_2^{(2)} + \bar{w}_3 x_2^{(3)} &= \frac{1}{3} \times 4 + \frac{1}{2} \times 5 + \frac{1}{6} \times 1 = 4 = \tilde{x}_2 \end{aligned}$$

であるから, 定理3の(27)が成立している.

しかし, この場合(37)あるいは(41)が成立せず,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 = 5 &\neq \frac{8 + 4 + 2}{3} = \frac{14}{3} = x_1^G \\ \tilde{x}_2 = 4 &\neq \frac{4 + 5 + 1}{3} = \frac{10}{3} = x_2^G \end{aligned}$$

であり, Chebyshev 基準による近似解 $E(5, 4)$ と2次元単体 ABC の重心 $G(14/3, 10/3)$ は一致しない(第1図を参照).



第 1 図

例題 2. 過剰決定の連立方程式を

$$\begin{aligned}
 (49) \quad & 2x_1 + x_2 = 6 \\
 & x_1 + 2x_2 = 6 \\
 & 3x_1 + 3x_2 = 21
 \end{aligned}$$

とする(過剰決定の問題の場合, 3 番目の式を $x_1 + x_2 = 7$ とすると, 別の近似解がえられるので, このようにすることはできない).

(49) の各々の誤差を

$$e_1 = 6 - 2x_1 - x_2, \quad e_2 = 6 - x_1 - 2x_2, \quad e_3 = 21 - 3x_1 - 3x_2$$

とし,

$$z = \max(|e_1|, |e_2|, |e_3|)$$

とすると, Chebyshev 基準による近似解は,

$$z$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + z &\geq 6, & -2x_1 - x_2 + z &\geq -6 \\
x_1 + 2x_2 + z &\geq 6, & -x_1 - 2x_2 + z &\geq -6 \\
3x_1 + 3x_2 + z &\geq 21, & -3x_1 - 3x_2 + z &\geq -21 \\
&& z &\geq 0
\end{aligned}$$

という問題の最適解としてえられる。この双対問題は、

$$6(u_1 - v_1) + 6(u_2 - v_2) + 21(u_3 - v_3)$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$\begin{aligned}
2(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + 3(u_3 - v_3) &= 0 \\
(u_1 - v_1) + 2(u_2 - v_2) + 3(u_3 - v_3) &= 0 \\
u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + u_3 + v_3 &\leq 1 \\
u_i \geq 0, v_i \geq 0 \quad (i=1, 2, 3)
\end{aligned}$$

と表せる。

主問題の最適解は、

$$(50) \quad \tilde{x}_1 = 3, \tilde{x}_2 = 3, \tilde{z} = 3$$

であり、これは第2図の点 G で示される。双対問題の最適解は、(8)を用いて

$$(51) \quad \tilde{w}_1 = \tilde{v}_1 = \frac{1}{3}, \tilde{w}_2 = \tilde{v}_2 = \frac{1}{3}, \tilde{w}_3 = \tilde{u}_3 = \frac{1}{3}$$

である(他の双対変数はすべてゼロである)。次に、(49)によってできる2次元単体の頂点を求める。

(49)の1番目の式を除いたときの他の2直線の交点の座標は、

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} &= 6 \\
3x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)} &= 21
\end{aligned}$$

より

$$(52-1) \quad x_1^{(1)} = 8, x_2^{(1)} = -1$$

であり、これは第2図の点 A で示される。(49)の2番目の式を除いたときの2直線の交点の座標は、

$$\begin{aligned}
2x_1^{(2)} + x_2^{(2)} &= 6 \\
3x_1^{(2)} + 3x_2^{(2)} &= 21
\end{aligned}$$

より

$$(52-2) \quad x_1^{(2)} = -1, x_2^{(2)} = 8$$

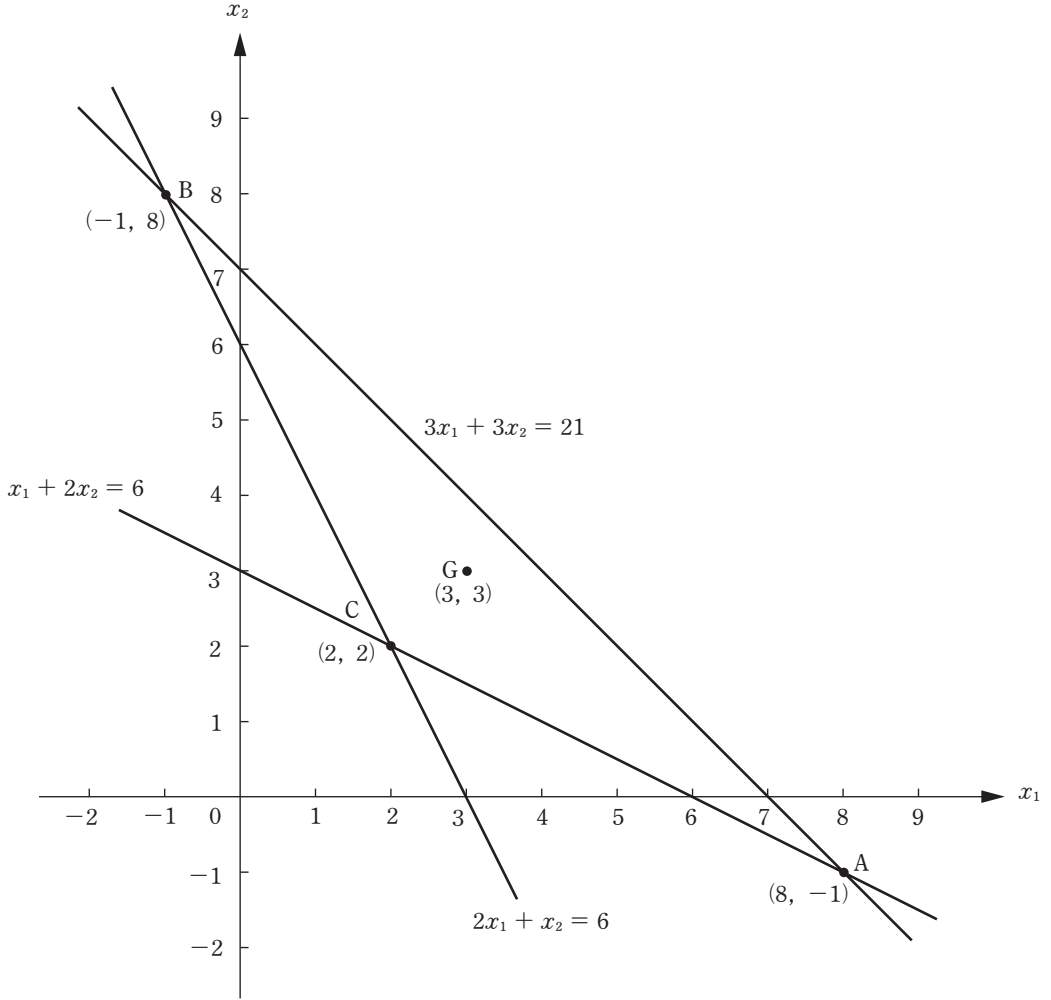
であり、これは点 B で示される。同様に3番目の式を除いたときの2直線の交点は、

$$\begin{aligned}
2x_1^{(3)} + x_2^{(3)} &= 6 \\
x_1^{(3)} + 2x_2^{(3)} &= 6
\end{aligned}$$

より

$$(52-3) \quad x_1^{(3)} = 2, x_2^{(3)} = 2$$

であり、これは点 C で示される。(50), (51), (52)より



第2図

$$\tilde{w}_1 x_1^{(1)} + \tilde{w}_2 x_1^{(2)} + \tilde{w}_3 x_1^{(3)} = \frac{1}{3} \times 8 + \frac{1}{3} \times (-1) + \frac{1}{3} \times 2 = 3 = \tilde{x}_1$$

$$\tilde{w}_1 x_2^{(1)} + \tilde{w}_2 x_2^{(2)} + \tilde{w}_3 x_2^{(3)} = \frac{1}{3} \times (-1) + \frac{1}{3} \times 8 + \frac{1}{3} \times 2 = 3 = \tilde{x}_2$$

であるから、定理3の(27)が成立していることが確認できる。さらに、(49)より

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

であるから、(8)と(51)より

$$\sigma_1 = -1, \quad \sigma_2 = -1, \quad \sigma_3 = 1$$

である。これらより

$$D_2 = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1} D_1 = 3, \quad D_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} D_1 = 3$$

であって, (37)が成立している. また, これらの σ_i に対して

$$\sigma_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \sigma_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \sigma_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であるから, (41)が成立している. したがって, 定理4, または定理6より(52)で表される3つの頂点A, B, Cによってできる2次元単体の重心Gの座標は,

$$x_1^G = \frac{x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + x_1^{(3)}}{3} = 3 = \tilde{x}_1, \quad x_2^G = \frac{x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + x_2^{(3)}}{3} = 3 = \tilde{x}_2$$

であり, これはChebyshev基準による近似解と一致している(第2図を参照).

参考文献

- [1] Bertsimas, D., and Tsitsiklis, J. N., *Introduction to Linear Optimization*. Belmont, Mass.: Athena Scientific, 1997.
- [2] Chvátal, V., *Linear Programming*. New York: W. H. Freeman and Co., 1983.
- [3] Collatz, L., and Wetterling, W., *Optimization Problems*. New York: Springer-Verlag, 1975.
- [4] Cooper, L., and Steinberg, D., *Methods and Applications of Linear Programming*. Philadelphia, PA: W. B. Saunders Co., 1974.
- [5] Dantzig, G. B., and Thapa, M. N., *Linear Programming. 1: Introduction*. New York: Springer-Verlag, 1997.
- [6] Gass, S. I., *Linear Programming: Methods and Applications*. Fifth Ed., New York: McGraw-Hill Book Co., 1985.
- [7] Hadley, G., *Linear Programming*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1962.
- [8] Krekó, B., *Linear Programming*. London: Sir Isaac Pitman & Sons, 1968.
- [9] Murty, K. G., *Linear Programming*. New York: John Wiley & Sons, 1983.
- [10] Rabinowitz, P., "Applications of Linear Programming to Numerical Analysis," *SIAM Review*, Vol. 10 (1968), pp. 121-59.
- [11] Rice, J. R., *The Approximation of Functions*, Vol. 1—*Linear Theory*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1964.
- [12] Rivlin, T. J., *An Introduction to the Approximation of Functions*. New York: Dover Publications, 1981.
- [13] Stiefel, E., "Note on Jordan Elimination, Linear Programming and Tchebycheff Approximation," *Numerische Mathematik*, Vol. 2 (1960), pp. 1-17.
- [14] Stiefel, E., "Methods — Old and New — for Solving the Tchebycheff Approximation Problem," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 1 (1964), pp. 164-76.
- [15] Watson, G. A., *Approximation Theory and Numerical Methods*. New York: John Wiley & Sons, 1980.
- [16] Zukhovitskiy, S. I., and Avdeyeva, L. I., *Linear and Convex Programming*. Philadelphia, PA: W. B. Saunders Co., 1966.