Leslie 行列に基づいた期末収穫問題と期首収穫問題の最適解

尾　崎　雄一郎

1．はじめに

ある動物の雌を年令によって幾つかのクラスに分け，各クラスの個体の出産率と生存率は年令にのみ依存する一定の値であるとして Lewis [12]や Leslie [10]，[11]が個体数の変動や年令構成を考察した．各クラスの出産率と生存率をまとめて表した非負行列は Leslie 行列と呼ばれ，生態学や人口学で利用されている．Leslie 行列に基づいて各クラスの個体数を毎期一定に維持しつつ，増殖した動物を幾つかのクラスから収穫する問題が Anton and Rorres［１］（pp. 625-46），Beddington and Taylor［２］，Lefkovitch［９］などによって行列の固有値問題の観点から分析されている．

Doubleday［３］は Leslie 行列より一般的な非負行列を用いて各クラスの個体数を毎期一定に維持しつつ，期末や期首の収穫からえられる総収入を最大にするリニアー・プログラミングの問題を初めて定式化し，同じパラメーターの下で期末収穫問題の総収入が期首収穫問題の総収入以上であることなどを証明した．尾崎［14］は Doubleday に基づくけれども，もっと直接的な方法で Leslie 行列による収穫問題をリニアー・プログラミングによって定式化し，期末収穫問題の総収入が期首収穫問題の総収入より大きいか，等しいことを証明し，期末収穫問題の総収入が期首収穫問題の総収入より大きくなるための条件や，等しくなるための条件などを明らかにした．尾崎・永田［15］は期末収穫問題を期首収穫問題に変換する方法と期首収穫問題を期末収穫問題に変換する方法を示し，これらに基づいて期末収穫問題の総収入が期首収穫問題の総収入以上であることなどを証明し，またある条件の下ではこれらの問題の最適解や最大の総収入の間に一定の関係があることを見出した．

本論文において Leslie 行列による期末収穫問題と期首収穫問題をリニアー・プログラミングを用いて定式化し，これらの問題の最適解を一般的に求め，期末収穫問題の総収入が期首収穫問題の総収入以上であること，すべてのクラスの個体の価格が等しいときには期末収穫問題と期首収穫問題の収穫するクラスは同じになることなどを証明する．

2．Leslie 行列

ある動物の雌を年令の最も若いものから最も年をとったものまで全部で n 個の年令のクラスに分ける．年令の最も若いものを１番目のクラスとし，以下順に等しい年令間隔でクラスを分け，最も年をとったもののクラスを n 番目とする．年令間隔に等しい時間間隔を考察期間とし，１期間経過する間に i 番目のクラスの雌１個体が出産する平均的な個体数を一定の a_i とし，すべての a_i は非負で，少なくとも１つの a_i は正であるとする．i 番目のクラスの雌が１つ上の $i+1$ 番目のクラ

スへ生存できる平均的な生存率を一定の b_i とし，１番目から $n-1$ 番目のクラスについては b_i は正で，１以下であり，n 番目のクラスについてはそれよりも上のクラスを設けていないので $b_n=0$ であるとする．以上の内容をまとめた非負行列

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

を Leslie 行列という．

今述べたように Leslie 行列において

(1)　$$a_i \geqq 0 \quad (i=1,\cdots,n),\ \ 0 < b_i \leqq 1 \quad (i=1,\cdots,n-1),\ \ b_n=0$$

であり，少なくとも１つの a_i は正である．記述を簡単にし，一般的に表すために

(2)　$$\begin{aligned} A_i &= a_1 + a_2b_1 + \cdots + a_ib_1b_2\cdots b_{i-1} - 1 && (i=1,\cdots,n) \\ B_i &= 1 + b_1 + \cdots + b_1b_2\cdots b_{i-1} && (i=1,\cdots,n) \\ b_0 &= 1,\ A_0=-1,\ B_0=0 \end{aligned}$$

と定義する．(1) と (2) より

(3)　$$\begin{aligned} A_i &= A_{i-1} + a_ib_1b_2\cdots b_{i-1} && (i=1,\cdots,n) \\ B_i &= B_{i-1} + b_1b_2\cdots b_{i-1} && (i=1,\cdots,n) \end{aligned}$$

が成立する．

３．期末収穫問題

期末収穫問題は毎期期首における各クラスの個体数を一定に保ちつつ，期間の終りに各クラスの個体の一部または全部を収穫してすべてのクラスからえられる総収入を最大にする問題である．期首における i 番目のクラスの個体数を x_i，i 番目のクラスから期首に収穫する個体数を h_i，i 番目のクラスの１個体の価格を一定の p_i，期首における群全体の個体数を一定の $c\ (>0)$，目的関数の値を f とする．このとき，期首における各クラスの個体数の合計が c に等しく，$\sum x_i = c$ となり，１期間経過する間に各クラスの雌が出産する１番目のクラスの個体総数 $\sum a_ix_i$ から１番目のクラスの期末の収穫数 h_1 を引いた残りの個体数が期首に存在していたこのクラスの個体数 x_1 に等しくなるために $\sum a_ix_i - h_1 = x_1$ が成立しなければならない．さらに，期首における $i-1$ 番目のクラスの個体数 x_{i-1} はそのクラスの平均的生存率に該当する数だけ生存して期末に i 番目のクラスの個体数 $b_{i-1}x_{i-1}$ となり，これから i 番目のクラスの期末の収穫数 h_i を引いた残りが期首に存在していた i 番目のクラスの個体数 x_i に等しくなるために $b_{i-1}x_{i-1} - h_i = x_i$ が成立しなければならない．また，すべての変数 x_i と h_i は非負でなければならない．以上が期末収穫問題の制約条件のすべてである．１個体当り p_i という価格で i 番目のクラスから h_i だけ収穫するとき，すべてのクラスからえられる総収入 $\sum p_ih_i$ が最大にすべき目的関数であり，これを f とし，f の最大値を f^* とする．

以上より期末収穫問題は，

(4)　$$f = p_1h_1 + p_2h_2 + \cdots + p_nh_n$$

を次の制約条件の下で最大にする

(5)
$$
\begin{array}{l}
x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = c \\
(1-a_1)x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_{n-1}x_{n-1} - a_nx_n + h_1 = 0 \\
-b_1x_1 + x_2 + h_2 = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-b_{n-1}x_{n-1} + x_n + h_n = 0 \\
x_i \geqq 0,\ h_i \geqq 0 \quad (i=1,\cdots,n)
\end{array}
$$

というリニアー・プログラミングの問題として表せる．主問題 (4)−(5) に対応する双対問題は，

(6)
$$c\,u_0$$

を次の制約条件の下で最小にする

(7)
$$
\begin{array}{l}
u_0 + (1-a_1)u_1 - b_1u_2 \geqq 0 \\
u_0 - a_2u_1 + u_2 - b_2u_3 \geqq 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_0 - a_{n-1}u_1 + u_{n-1} - b_{n-1}u_n \geqq 0 \\
u_0 - a_nu_1 + u_n \geqq 0 \\
u_i \geqq p_i \quad (i=1,\cdots,n)
\end{array}
$$

と表せる．

４．期末収穫問題の最適解

定理１． 主問題 (4)−(5) に最適解が存在するための必要十分条件は，

(8)
$$a_1 + a_2b_1 + \cdots + a_nb_1b_2\cdots b_{n-1} \geqq 1 \qquad (A_n \geqq 0)$$

が成立することである．

証明． 尾崎・永田［15］の定理１を参照．　□

以下において (8) が成立するものとする．次に，$A_j \geqq 0$ となる最初のクラスを e とし，i と j を

(9)
$$A_i < 0 \quad (i=1,\cdots,e-1), \qquad A_j \geqq 0 \quad (j=e,\cdots,n)$$

が成立するクラスとする（$e=1$ であるときには，$A_i<0$ となるクラスは存在しない）．しかし，自明のところでは簡単化のために j の代りに i を用いることもある．また，各クラスの個体の価格を

(10)
$$p_i > 0 \qquad (i=1,\cdots,n)$$

であるとする（一般的な表現のために p_{n+1} が現れることがあるが，そのときには $p_{n+1}=0$ とする）．

(9) の下で g と k を

$$g \in I = \{1,\cdots,e\},\ \ k \in J = \{e,\cdots,n\}$$

であり，

(11)
$$\frac{p_gA_kb_1b_2\cdots b_{g-1} - p_{k+1}A_{g-1}b_1b_2\cdots b_k}{A_kB_{g-1} - A_{g-1}B_k} = \max_{\substack{i=1,\cdots,e\\ j=e,\cdots,n}} \frac{p_iA_jb_1b_2\cdots b_{i-1} - p_{j+1}A_{i-1}b_1b_2\cdots b_j}{A_jB_{i-1} - A_{i-1}B_j}$$

が成立するクラスであると定義する（後に示すようにこのようなクラス g が存在しないこともある）．

定理２．(8) と (10) が成立するとき，(11) の値が正であるための必要十分条件は，

(12) $$A_n > 0$$

あるいは

(13) $$A_n = a_n = 0$$

が成立することである．

証明．（十分性）(12) が成立すると仮定する．(11) の右辺において $i=1$，$j=n$ とし，(1)，(2)，(10) に注意すると，$p_1A_n/B_n>0$ となり，したがって (11) は正になる．次に，(13) が成立すると仮定する．このとき，(3) より $A_n=A_{n-1}=0$ であるから，(11) の右辺において $i=1$，$j=n-1$ とすると，(1)，(2)，(10) より $p_nb_1b_2\cdots b_{n-1}/B_{n-1}>0$ となり，やはり (11) は正になる．

（必要性）(12) と (13) が成立しないならば，(11) は正にならないことを示せば，この対偶より (11) が正であるならば，(12) あるいは (13) が成立する．そこで，(12) と (13) が成立しないと仮定する．(8) が成立するとき，(12) と (13) が成立しないならば，$A_n=0$，$a_n>0$ が成立しなければならない．(3) より

$$A_n = A_{n-1} + a_nb_1b_2\cdots b_{n-1} = 0$$

であるから，$A_{n-1}<0$ であり，再び (3) より $A_i<0$ $(i=1,\cdots,n-1)$ である．ゆえに，$A_j=0$ となるクラスは $j=n$ だけであり，(9) より $e=n$ である．これらより (11) の右辺において考慮すべき i と j は $i=1,\cdots,n$, $j=n$ である．このとき，$A_j=A_n=0$，$b_j=b_n=0$ であるから，(11) の右辺の分子はすべての i に対してゼロになる．ゆえに，(11) の値は正になることはない．□

定理３．(8) と (10) が成立するとき，(11) の値がゼロであるための必要十分条件は，

(14) $$A_n = 0, \qquad a_n > 0$$

が成立することである．

証明．(8) に注意すると，定理２の対偶より直ちに結論をえる．□

定理４．(8), (10) と (12) が成立し，(11) において

$$A_k > 0$$

であるとする．このとき，主問題 (4)−(5) の最適解は，

(15)
$$\begin{aligned}
x_i^* &= \frac{(A_k - A_{g-1})b_1b_2\cdots b_{i-1}c}{A_kB_{g-1} - A_{g-1}B_k} && (i=1,\cdots,g-1)\\
x_i^* &= -\frac{A_{g-1}b_1b_2\cdots b_{i-1}c}{A_kB_{g-1} - A_{g-1}B_k} && (i=g,\cdots,k)\\
x_i^* &= 0 && (i=k+1,\cdots,n)\\
h_g^* &= \frac{A_kb_1b_2\cdots b_{g-1}c}{A_kB_{g-1}-A_{g-1}B_k},\quad h_{k+1}^* = -\frac{A_{g-1}b_1b_2\cdots b_kc}{A_kB_{g-1}-A_{g-1}B_k}\\
h_i^* &= 0 && (i=1,\cdots,n\,;\,i\neq g,\,k+1)
\end{aligned}$$

であり，双対問題 (6)−(7) の最適解は，

(16-1) $$u_0^* = \frac{p_gA_kb_1b_2\cdots b_{g-1} - p_{k+1}A_{g-1}b_1b_2\cdots b_k}{A_kB_{g-1} - A_{g-1}B_k}$$

(16–2) $$u_i^* = \frac{(A_k B_{i-1} - A_{i-1} B_k)\, u_0^* + p_{k+1} A_{i-1} b_1 b_2 \cdots b_k}{A_k b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} \qquad (i = 1, \cdots, e)$$

(16–3) $$u_i^* = \frac{(A_{g-1} B_{i-1} - A_{i-1} B_{g-1})\, u_0^* + p_g A_{i-1} b_1 b_2 \cdots b_{g-1}}{A_{g-1} b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} \qquad (i = e+1, \cdots, n)$$

である．

証明. この定理を証明するために，リニアー・プログラミングの主問題とその双対問題に実行可能解が存在し，これらの実行可能解に対する各々の問題の目的関数の値が等しいならば，これらの実行可能解は各々の問題の最適解であるという双対定理(Gale［４], pp. 10–1, Goldman and Tucker［５], pp. 60–1, Hadley［６], p. 228, Karlin［７], pp. 123–4, Krekó［８], p. 193, Murty［13], p. 191 など)を利用する．

（ｉ）最初に，(15) が主問題の制約条件 (5) の $n+1$ 個の方程式を満たすことを示す．(15) を (5) の１番目の式に代入し，(2) と (3) を用いると，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i^* &= \frac{(A_k - A_{g-1})\, c}{A_k B_{g-1} - A_{g-1} B_k} \sum_{i=1}^{g-1} b_1 b_2 \cdots b_{i-1} - \frac{A_{g-1} c}{A_k B_{g-1} - A_{g-1} B_k} \sum_{i=g}^{k} b_1 b_2 \cdots b_{i-1} \\ &= \frac{(A_k - A_{g-1})\, c}{A_k B_{g-1} - A_{g-1} B_k} B_{g-1} - \frac{A_{g-1} c}{A_k B_{g-1} - A_{g-1} B_k} (B_k - B_{g-1}) = c\end{aligned}$$

となり，(15) を (5) の２番目の式に代入して，整理すると，

$$x_1^* - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^* + h_1^* = \frac{(A_k - A_{g-1})\, c}{A_k B_{g-1} - A_{g-1} B_k} (-A_{g-1}) - \frac{A_{g-1} c}{A_k B_{g-1} - A_{g-1} B_k} (-A_k + A_{g-1}) = 0$$

となる．さらに，

$$-b_{i-1} x_{i-1}^* + x_i^* + h_i^* = -\frac{(A_k - A_{g-1}) b_1 b_2 \cdots b_{i-1} c}{A_k B_{g-1} - A_{g-1} B_k} + \frac{(A_k - A_{g-1}) b_1 b_2 \cdots b_{i-1} c}{A_k B_{g-1} - A_{g-1} B_k} = 0 \quad (i = 2, \cdots, g)$$

$$-b_{i-1} x_{i-1}^* + x_i^* + h_i^* = \frac{A_{g-1} b_1 b_2 \cdots b_{i-1} c}{A_k B_{g-1} - A_{g-1} B_k} - \frac{A_{g-1} b_1 b_2 \cdots b_{i-1} c}{A_k B_{g-1} - A_{g-1} B_k} = 0 \qquad (i = g+1, \cdots, k+1)$$

となり，(5) の残りの方程式は x_i^* と h_i^* がともにゼロであることから満たされる．次に，(1) に注意し，(2) より $B_i > 0$，(9) より $A_{g-1} < 0$，仮定により $A_k > 0$ であるから，(15) のすべての x_i^* と h_i^* は正かゼロであり，(5) の非負性の条件も満たされる．以上より (15) は主問題の実行可能解である．

（ⅱ）(16) が双対問題の制約条件 (7) の最初の n 個の不等式を満たすことを示す．(16–2) と (16–3) を各々 $i = 1, \cdots, n$ まで拡張し，拡張したこれらの式は同じ i に関して等しいことを利用して証明を簡単にする．拡張した (16–2) の右辺から拡張した (16–3) の右辺を引き，(16–1) を用いると，

$$\begin{aligned}&\frac{(A_k B_{i-1} - A_{i-1} B_k)\, u_0^* + p_{k+1} A_{i-1} b_1 b_2 \cdots b_k}{A_k b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} - \frac{(A_{g-1} B_{i-1} - A_{i-1} B_{g-1})\, u_0^* + p_g A_{i-1} b_1 b_2 \cdots b_{g-1}}{A_{g-1} b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} \\ &\quad = \frac{A_{i-1} (A_k B_{g-1} - A_{g-1} B_k)}{A_{g-1} A_k b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} \left(u_0^* - \frac{p_g A_k b_1 b_2 \cdots b_{g-1} - p_{k+1} A_{g-1} b_1 b_2 \cdots b_k}{A_k B_{g-1} - A_{g-1} B_k} \right) \\ &\quad = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n)\end{aligned}$$

となる．これより拡張した (16–2) と (16–3) は表現は異なるがすべての i に関して同一の式である．

次に，拡張した (16–3) において $i = 1$ とし，(2) を用いると，

$$u_1^* = \frac{B_{g-1} u_0^* - p_g b_1 b_2 \cdots b_{g-1}}{A_{g-1}}$$

となる．この式と (16-3) を (7) の左辺に代入し，(3) を用いて整理すると，

$$u_0^* - a_i u_1^* + u_i^* - b_i u_{i+1}^* = u_0^* - a_i\left(\frac{B_{g-1}u_0^* - p_g b_1 b_2\cdots b_{g-1}}{A_{g-1}}\right)$$

$$+\frac{(A_{g-1}B_{i-1} - A_{i-1}B_{g-1})\,u_0^* + p_g A_{i-1} b_1 b_2\cdots b_{g-1}}{A_{g-1}b_1 b_2\cdots b_{i-1}}$$

$$-\,b_i\left[\frac{(A_{g-1}B_i - A_i B_{g-1})\,u_0^* + p_g A_i b_1 b_2\cdots b_{g-1}}{A_{g-1}b_1 b_2\cdots b_i}\right]$$

$$=\frac{A_{g-1}(b_1 b_2\cdots b_{i-1} + B_{i-1} - B_i) + B_{g-1}(-\,a_i b_1 b_2\cdots b_{i-1} - A_{i-1} + A_i)}{A_{g-1}b_1 b_2\cdots b_{i-1}}\,u_0^*$$

$$+\frac{p_g b_1 b_2\cdots b_{g-1}\,(a_i b_1 b_2\cdots b_{i-1} + A_{i-1} - A_i)}{A_{g-1}b_1 b_2\cdots b_{i-1}} = 0 \quad (i = 1, \cdots, n-1)$$

となる．(7) の n 番目の不等式の左辺は，u_1^*，(16-3)，(3) を用いて

$$u_0^* - a_n u_1^* + u_n^* = u_0^* - a_n\left(\frac{B_{g-1}u_0^* - p_g b_1 b_2\cdots b_{g-1}}{A_{g-1}}\right)$$

$$+\frac{(A_{g-1}B_{n-1} - A_{n-1}B_{g-1})\,u_0^* + p_g A_{n-1} b_1 b_2\cdots b_{g-1}}{A_{g-1}b_1 b_2\cdots b_{n-1}}$$

$$=\frac{(A_{g-1}B_n - A_n B_{g-1})}{A_{g-1}b_1 b_2\cdots b_{n-1}}\left(u_0^* - \frac{p_g A_n b_1 b_2\cdots b_{g-1}}{A_n B_{g-1} - A_{g-1}B_n}\right) \geqq 0$$

となる．この積の第１項は (1)，(2)，$A_{g-1} < 0$，$A_n > 0$ より正であり，積の第２項の括弧の中は，(11) の左辺の値である (16-1) の u_0^* と (11) の右辺において $i = g$，$j = n$ としたときの値との差であるから，非負である．これらより (7) の n 番目の不等式も満たされる．以上によって (16) が (7) の最初の n 個の不等式を満たすことが証明された．

（iii）(7) の後半の n 個の不等式が成立することを示すために (16-2) を

$$u_i^* = \frac{(A_k B_{i-1} - A_{i-1}B_k)}{A_k b_1 b_2\cdots b_{i-1}}\left(u_0^* - \frac{p_i A_k b_1 b_2\cdots b_{i-1} - p_{k+1}A_{i-1}b_1 b_2\cdots b_k}{A_k B_{i-1} - A_{i-1}B_k}\right) + p_i \quad (i = 1, \cdots, e)$$

と表す．この式の積の第１項は (9) より $A_{i-1} < 0\ (i \in I)$，仮定より $A_k > 0$ であるから，正であり，積の第２項の括弧の中は (11) の左辺の値である (16-1) の u_0^* と (11) の右辺において $j = k$ としたときの値との差であるから，非負である．したがって，上式より

$$u_i^* \geqq p_i \qquad (i = 1, \cdots, e)$$

が成立する．同様に，(16-3) を $j = i$ として

$$u_j^* = -\frac{(A_{j-1}B_{g-1} - A_{g-1}B_{j-1})}{A_{g-1}b_1 b_2\cdots b_{j-1}}\left(u_0^* - \frac{p_g A_{j-1} b_1 b_2\cdots b_{g-1} - p_j A_{g-1} b_1 b_2\cdots b_{j-1}}{A_{j-1}B_{g-1} - A_{g-1}B_{j-1}}\right) + p_j$$

$$(j = e+1, \cdots, n)$$

と表す．この式の積の第１項は (9) より $A_{g-1} < 0\ (g \in I)$，$A_j \geqq 0\ (j \in J)$ より正，積の第２項の括弧の中は (11) の左辺の値に等しい u_0^* と (11) の右辺において $i = g$ としたときの値との差であるから，非負である．ゆえに，

$$u_j^* \geqq p_j \qquad (j = e+1, \cdots, n)$$

が成立する．

以上の（ii）と（iii）より (16) は双対問題の実行可能解である．

（iv）最後に，(15) と (16) より

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} p_i h_i^* = \frac{(p_g A_k b_1 b_2 \cdots b_{g-1} - p_{k+1} A_{g-1} b_1 b_2 \cdots b_k)\, c}{A_k B_{g-1} - A_{g-1} B_k} = c u_0^*$$

が成立するから，主問題の実行可能解 (15) に対する目的関数 (4) の値と双対問題の実行可能解 (16) に対する目的関数 (6) の値が等しい．したがって，双対定理により $A_k > 0$ であるとき，(15) が主問題の最適解であり，(16) が双対問題の最適解である．□

定理５．(8), (10) と (12) が成立し，(11) において

$$A_k = 0$$

であるとする．このとき，主問題 (4)−(5) の最適解は，

(17)
$$x_i^* = \frac{b_1 b_2 \cdots b_{i-1} c}{B_k} \quad (i = 1, \cdots, k), \quad x_i^* = 0 \quad (i = k+1, \cdots, n)$$
$$h_{k+1}^* = \frac{b_1 b_2 \cdots b_k c}{B_k}, \qquad h_i^* = 0 \quad (i = 1, \cdots, n\,;\, i \neq k+1)$$

であり，双対問題 (6)−(7) の最適解は，

(18-1)
$$u_0^* = \frac{p_{k+1} b_1 b_2 \cdots b_k}{B_k}$$

(18-2)
$$\max_{i=1,\cdots,e} \frac{B_{i-1} u_0^* - p_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}{A_{i-1}} \leqq u_1^* \leqq \min_{\substack{j=e,\cdots,n \\ A_j>0}} \frac{B_j u_0^* - p_{j+1} b_1 b_2 \cdots b_j}{A_j}$$

(18-3)
$$u_i^* = \frac{B_{i-1} u_0^* - A_{i-1} u_1^*}{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} \qquad (i = 2, \cdots, n)$$

である．

証明．（ｉ）(17) が制約条件 (5) の $n+1$ 個の方程式を満たすことを示す．(17) を (5) に代入し，(2) を用いると，

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \frac{c}{B_k} \sum_{i=1}^{k} b_1 b_2 \cdots b_{i-1} = c$$

$$x_1^* - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^* + h_1^* = -\frac{A_k c}{B_k} = 0$$

$$-b_{i-1} x_{i-1}^* + x_i^* + h_i^* = -\frac{b_1 b_2 \cdots b_{i-1} c}{B_k} + \frac{b_1 b_2 \cdots b_{i-1} c}{B_k} = 0 \qquad (i = 2, \cdots, k+1)$$

であり，(5) の残りの方程式は x_i^* と h_i^* がゼロであることから満たされる．また，(1) よりすべての x_i^* と h_i^* は正かゼロである．以上より (17) は主問題の実行可能解である．

（ii）まず (18-2) の１番左の式と１番右の式が矛盾しないことを示す．(12) より $A_j > 0$ となる j が存在することに注意し，(18-2) の１番右の任意の式から１番左の任意の式を引くと，

$$\frac{B_j u_0^* - p_{j+1} b_1 b_2 \cdots b_j}{A_j} - \frac{B_{i-1} u_0^* - p_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}{A_{i-1}}$$
$$= \left(\frac{B_j}{A_j} - \frac{B_{i-1}}{A_{i-1}}\right) u_0^* + \frac{p_i A_j b_1 b_2 \cdots b_{i-1} - p_{j+1} A_{i-1} b_1 b_2 \cdots b_j}{A_{i-1} A_j}$$
$$= \frac{(A_{i-1} B_j - A_j B_{i-1})}{A_{i-1} A_j} \left(u_0^* - \frac{p_i A_j b_1 b_2 \cdots b_{i-1} - p_{j+1} A_{i-1} b_1 b_2 \cdots b_j}{A_j B_{i-1} - A_{i-1} B_j}\right)$$

となる．ここで，$A_{i-1}<0\,(i\in I)$，仮定より $A_j>0\,(j\in J)$ であるから，上式の積の第１項は正，$A_k=0$ であるとき，(11) の左辺の値は (18-1) の u_0^* に等しいから，(11) の定義より上式の積の第２項は非負である．したがって，上式は非負であるから，u_1^* を定義し，その範囲を定める (18-2) の左右２つの項は矛盾しない（u_1^* はこれら上限と下限の任意の値でよい）．

（ⅲ）次に，(18) が制約条件 (7) の前半の n 個の不等式を満たすことを示す．(18) を (7) の左辺に代入し，(3) を用いると，

$$u_0^*-a_iu_1^*+u_i^*-b_iu_{i+1}^*=u_0^*-a_iu_1^*+\frac{B_{i-1}u_0^*-A_{i-1}u_1^*}{b_1b_2\cdots b_{i-1}}-b_i\frac{(B_iu_0^*-A_iu_1^*)}{b_1b_2\cdots b_i}$$
$$=\frac{(b_1b_2\cdots b_{i-1}+B_{i-1}-B_i)\,u_0^*}{b_1b_2\cdots b_{i-1}}-\frac{(a_ib_1b_2\cdots b_{i-1}+A_{i-1}-A_i)\,u_1^*}{b_1b_2\cdots b_{i-1}}=0\quad(i=1,\cdots,n-1)$$

となる．また，$i=n$ のとき，(3) を用いて

$$u_0^*-a_nu_1^*+u_n^*=u_0^*-a_nu_1^*+\frac{B_{n-1}u_0^*-A_{n-1}u_1^*}{b_1b_2\cdots b_{n-1}}=\frac{B_n}{b_1b_2\cdots b_{n-1}}\left(u_0^*-\frac{A_n}{B_n}u_1^*\right)\geqq 0$$

となる．(18-2) の１番右の式において $j=n$ とすると，$b_n=0$ であるから，

$$u_1^*\leqq\frac{B_n}{A_n}u_0^*$$

をえ，これを用いると，上式の括弧内は非負であり，(7) の $i=n$ に対する不等式は非負である．以上より (18) は (7) の前半の n 個の不等式を満たす．

（ⅳ）さらに，(18) が (7) の後半の n 個の不等式を満たすことを示す．(2) を用いると，(18-3) は $i=1$ のときにも恒等的に成立することがわかる．このことを知って (18-3) を用いると，すべての i に対して

$$u_i^*-p_i=\frac{B_{i-1}u_0^*-(A_{i-1}u_1^*+p_ib_1b_2\cdots b_{i-1})}{b_1b_2\cdots b_{i-1}}\tag{19}$$

をえる．(9) より $A_{i-1}<0\,(i\in I)$ であるから，(18-2) の左側の不等式より

$$B_{i-1}u_0^*\geqq A_{i-1}u_1^*+p_ib_1b_2\cdots b_{i-1}$$

をえる．これと (19) より

$$u_i^*\geqq p_i\qquad(i=1,\cdots,e)$$

が成立する．次に，$A_j=0\,(j\in J)$ である j に対して (11) より

$$u_0^*\geqq\frac{p_{j+1}b_1b_2\cdots b_j}{B_j}$$

をえる．これと (19) より

$$u_j^*\geqq p_j\qquad(j\in J,\ A_j=0)$$

が成立する．最後に，$A_j>0\,(j\in J)$ である j に対して (18-2) の右側の不等式より

$$A_ju_1^*+p_{j+1}b_1b_2\cdots b_j\leqq B_ju_0^*$$

をえる．これと (19) より

$$u_j^*\geqq p_j\qquad(j\in J,\ A_j>0)$$

がえられる．以上によって (18) が (7) の後半の n 個の不等式を満たすことが判明した．

以上の（ⅲ）と（ⅳ）より (18) は双対問題の実行可能解である．なお，(18-2) で与えられる u_1^* は必ず

しも一意ではないから，(18-3) で定まる u_i^* (の幾つか) も一意ではない.

（v）(17) と (18) より

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} p_i h_i^* = \frac{p_{k+1} b_1 b_2 \cdots b_k c}{B_k} = c u_0^*$$

が成立し，主問題の実行可能解 (17) に対する目的関数 (4) の値と双対問題の実行可能解 (18) に対する目的関数 (6) の値が等しいので，(17) が主問題の最適解で，(18) が双対問題の最適解である．□

定理６． (8), (10) と (13) が成立するとき，主問題 (4)−(5) の最適解は,

(20)
$$x_i^* = \frac{b_1 b_2 \cdots b_{i-1} c}{B_k} \quad (i = 1, \cdots, k),\ x_i^* = 0 \quad (i = k+1, \cdots, n)$$
$$h_{k+1}^* = \frac{b_1 b_2 \cdots b_k c}{B_k}, \qquad h_i^* = 0 \quad (i = 1, \cdots, n\,;\, i \neq k+1)$$

であり，双対問題 (6)−(7) の最適解は,

(21-1)
$$u_0^* = \frac{p_{k+1} b_1 b_2 \cdots b_k}{B_k}$$

(21-2)
$$u_1^* = \max_{i=1,\cdots,e} \frac{B_{i-1} u_0^* - p_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}{A_{i-1}}$$

(21-3)
$$u_i^* = \frac{B_{i-1} u_0^* - A_{i-1} u_1^*}{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} \quad (i = 2, \cdots, e),\quad u_i^* = \frac{B_{i-1} u_0^*}{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} \qquad (i = e+1, \cdots, n)$$

である.

証明. (ｉ) (20) が制約条件 (5) を満たすことは定理５の証明の(ｉ)の場合と全く同じであるので，省略する.

（ii）(21) が制約条件 (7) の前半の n 個の不等式を満たすことを示す．(21-3) を (7) の左辺に代入し，(3) を用いると，

$$u_0^* - a_i u_1^* + u_i^* - b_i u_{i+1}^* = \left(1 + \frac{B_{i-1} - B_i}{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}\right) u_0^* - \left(a_i + \frac{A_{i-1} - A_i}{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}\right) u_1^* = 0 \quad (i = 1, \cdots, e-1)$$

となる．また，(9) と (13) より $A_e = 0$ であるから，(3) を用いて

$$u_0^* - a_e u_1^* + u_e^* - b_e u_{e+1}^* = \left(1 + \frac{B_{e-1} - B_e}{b_1 b_2 \cdots b_{e-1}}\right) u_0^* - \left(\frac{a_e b_1 b_2 \cdots b_{e-1} + A_{e-1}}{b_1 b_2 \cdots b_{e-1}}\right) u_1^* = 0$$

となり，さらに (9) と (13) より $A_j = a_j = 0$ $(j = e+1, \cdots, n)$ が成立するから,

$$u_0^* - a_i u_1^* + u_i^* - b_i u_{i+1}^* = \left(1 + \frac{B_{i-1} - B_i}{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}\right) u_0^* - a_i u_1^* = 0 \qquad (i = e+1, \cdots, n-1)$$

となる．最後に，定理２に注意すると，(13) が成立するとき，$u_0^* > 0$ であるから,

$$u_0^* - a_n u_1^* + u_n^* = \left(1 + \frac{B_{n-1}}{b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}\right) u_0^* > 0$$

となる．以上より (21) は (7) の前半の n 個の不等式を満たす.

（iii）次に，(21) が (7) の後半の n 個の不等式を満たすことを示す．(21-2) の u_1^* の定義において $i = 1$ とし，(2) を用いると,

$$u_1^* \geqq p_1$$

をえる．これと (10) より $u_1^* > 0$ である．(9) より $A_{i-1} < 0$ $(i \in I)$ であることと u_1^* の定義より

$$u_i^* - p_i = \frac{B_{i-1}u_0^* - (A_{i-1}u_1^* + p_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1})}{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} \geqq 0 \qquad (i = 2, \cdots, e)$$

が成立する．また，(13) より $A_j = 0$ $(j \in J)$ であるから，(11) において

$$u_0^* = \frac{p_{k+1} b_1 b_2 \cdots b_k}{B_k} \geqq \frac{p_{j+1} b_1 b_2 \cdots b_j}{B_j} \qquad (j = e, \cdots, n)$$

が成立する．これを用いると (21-3) より

$$u_j^* - p_j = \frac{B_{j-1}u_0^* - p_j b_1 b_2 \cdots b_{j-1}}{b_1 b_2 \cdots b_{j-1}} \geqq 0 \qquad (j = e+1, \cdots, n)$$

をえる．ゆえに，(21) は (7) の後半の n 個の不等式を満たす．

（iv）(20) と (21-1) より

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} p_i h_i^* = \frac{p_{k+1} b_1 b_2 \cdots b_k c}{B_k} = c u_0^*$$

が成立するから，(20) に対する目的関数 (4) の値と (21) に対する目的関数 (6) の値が等しい．したがって，(20) が主問題 (4)−(5) の最適解で，(21) が双対問題 (6)−(7) の最適解である．　□

定理７．(8), (10) と (14) が成立するとき，主問題 (4)−(5) の最適解は，

(22)
$$x_i^* = \frac{b_1 b_2 \cdots b_{i-1} c}{B_n}, \qquad h_i^* = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

であり，双対問題の最適解は，

(23-1)
$$u_0^* = 0$$

(23-2)
$$u_1^* = \max_{i=1,\cdots,n} -\frac{p_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}{A_{i-1}}$$

(23-3)
$$u_i^* = -\frac{A_{i-1} u_1^*}{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} \qquad (i = 2, \cdots, n)$$

である．

証明．（ｉ）(2) と (14) に注意すると，(22) は制約条件 (5) のすべての方程式を満たし，x_i^* はすべて正，h_i^* はすべてゼロであるので，主問題の実行可能解である．

（ii）(23-1) と (23-3) を制約条件 (7) の前半の不等式に代入し，(3) に注意すると，

$$u_0^* - a_i u_1^* + u_i^* - b_i u_{i+1}^* = -\frac{(a_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1} + A_{i-1} - A_i)}{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} u_1^* = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n-1)$$

が成立する．最後に，$A_n = 0$ に注意すると，

$$u_0^* - a_n u_1^* + u_n^* = -\frac{(a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1} + A_{n-1})}{b_1 b_2 \cdots b_{n-1}} u_1^* = 0$$

となるので，(23) は (7) の前半の n 個の不等式を満たす．次に，(23-2) において $i = 1$ とし，(2) を用いると，

$$u_1^* \geqq -\frac{p_1 b_0}{A_0} = p_1$$

が成立する．(3)，(9)，(14) より $A_i < 0$ $(i = 1, \cdots, n-1)$ であるから，(23-2) より

$$A_{i-1} u_1^* + p_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1} \leqq 0 \qquad (i = 2, \cdots, n)$$

をえる．これと (23-3) より

$$u_i^* - p_i = -\frac{A_{i-1}u_1^* + p_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} \qquad (i = 2, \cdots, n)$$

をえる．これは上の結果より非負である．ゆえに，

$$u_i^* \geqq p_i \qquad (i = 2, \cdots, n)$$

が成立する．以上より (23) は (7) の後半の n 個の不等式も満たす．したがって，(23) は双対問題の実行可能解である．

（iii）このとき，２つの問題の目的関数の値は，

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} p_i h_i^* = 0 = cu_0^*$$

となって等しいから，(22) が主問題の最適解であり，(23) が双対問題の最適解である．　□

５．期首収穫問題

期首収穫問題は，期首の収穫直前の各クラスの個体数を毎期一定に維持しつつ，各クラスの個体の一部または全部を期首に収穫し，各クラスの収穫からえられる総収入を最大にする問題である．期首の収穫直前の i 番目のクラスの個体数を x_i'，期首に i 番目のクラスから収穫する個体数を h_i'，目的関数の値を f'，f' の最大値を $\hat{f}'$ とし，その他の記号は期末収穫問題と同じであるとする．期首における収穫直前の各クラスの個体数の合計は c に等しく，

(24)
$$x_1' + x_2' + \cdots + x_n' = c$$

であるとする．期首に i 番目のクラスの個体数 x_i' から h_i' だけ収穫し，収穫後に残った $x_i' - h_i'$ が１期間経過する間にそのクラスの平均的出産率に該当する数の１番目のクラスの個体を出産し，それらの合計 $\sum a_i(x_i' - h_i')$ が期首の収穫直前の１番目のクラスの個体数 x_1' に等しくなるために

(25)
$$a_1(x_1' - h_1') + a_2(x_2' - h_2') + \cdots + a_n(x_n' - h_n') = x_1'$$

が成立するものとする．期首の収穫直後に残っている $i-1$ 番目のクラスの個体数はそのクラスの平均的生存率に該当する数 $b_{i-1}(x_{i-1}' - h_{i-1}')$ だけ生存して１つ上の i 番目のクラスの個体となり，これが収穫直前の i 番目のクラスの個体数 x_i' に等しくなるために

(26)
$$b_{i-1}(x_{i-1}' - h_{i-1}') = x_i' \qquad (i = 2, \cdots, n)$$

が成立するものとする．各クラスの収穫数 h_i' はそのクラスの収穫直前の個体数 x_i' 以下であり，これらは非負でなければならないから，

(27)
$$x_i' \geqq h_i' \geqq 0 \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

でなければならない．以上が期首収穫問題の制約条件のすべてであるが，次のようにして条件式のを減らすことができる．

期首の収穫直後に残っている i 番目のクラスの個体数を z_i とすると，(27) より

(28)
$$z_i = x_i' - h_i' \geqq 0,\ \ h_i' \geqq 0 \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

と表せ，(28) を用いると，(25) と (26) は

$$x_1' = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_n z_n$$

(29)
$$x'_2 = b_1 z_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x'_n = b_{n-1} z_{n-1}$$

と表せる．(29) を (24) に代入すると，

(30)
$$\sum_{i=1}^{n} x'_i = (a_1 + b_1)z_1 + (a_2 + b_2)z_2 + \cdots + (a_n + b_n)z_n = c$$

となる．ここで，(1) より $b_n = 0$ である．(28) を

$$h'_i = x'_i - z_i \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

と表し，この式に (29) の x'_i を代入すると，

(31)
$$\begin{aligned} h'_1 &= (a_1 - 1)z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_n z_n \\ h'_2 &= b_1 z_1 - z_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h'_n &= b_{n-1} z_{n-1} - z_n \end{aligned}$$

となる．以上が期首収穫問題の書き換えた制約条件である．

最大にすべき目的関数はすべてのクラスの期首の収穫からえられる総収入 $\sum p_i h'_i$ である．(28), (30), (31) より期首収穫問題は，

(32)
$$f' = p_1 h'_1 + p_2 h'_2 + \cdots + p_n h'_n$$

を次の制約条件の下で最大にする

(33)
$$\begin{array}{llllllll} (a_1 + b_1)z_1 & + (a_2 + b_2)z_2 & + \cdots & + (a_{n-1} + b_{n-1})z_{n-1} & + a_n z_n & & & = c \\ (1 - a_1)z_1 & - a_2 z_2 & - \cdots\cdots & - a_{n-1} z_{n-1} & - a_n z_n & + h'_1 & & = 0 \\ - b_1 z_1 & + z_2 & & & & & + h'_2 & = 0 \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & & & \\ & & & - b_{n-1} z_{n-1} & + z_n & & + h'_n & = 0 \end{array}$$
$$z_i \geqq 0, \quad h'_i \geqq 0 \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

と表せる．主問題 (32)－(33) に対応する双対問題は，

(34)
$$c\, v_0$$

を次の制約条件の下で最小にする

(35)
$$\begin{array}{llllll} (a_1 + b_1)v_0 & + (1 - a_1)v_1 & - b_1 v_2 & & & \geqq 0 \\ (a_2 + b_2)v_0 & - a_2 v_1 & + v_2 - b_2 v_3 & & & \geqq 0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & & \\ (a_{n-1} + b_{n-1})v_0 & - a_{n-1} v_1 & & + v_{n-1} - b_{n-1} v_n & & \geqq 0 \\ a_n v_0 & - a_n v_1 & & & + v_n & \geqq 0 \end{array}$$
$$v_i \geqq p_i \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

となる．

６．期首収穫問題の最適解

定理８．期首収穫問題の主問題 (32)−(33) に最適解が存在するための必要十分条件は，(8) が成立することである．

証明．尾崎・永田［15］の定理２を参照．□

(9) の下で d と m を

$$d \in I = \{1, \cdots, e\}, \quad m \in J = \{e, \cdots, n\}$$

であり，

$$\frac{p_d A_m b_1 b_2 \cdots b_{d-1} - p_{m+1} A_{d-1} b_1 b_2 \cdots b_m}{A_m B_d - A_{d-1} B_{m+1}} = \max_{\substack{i=1,\cdots,e \\ j=e,\cdots,n}} \frac{p_i A_j b_1 b_2 \cdots b_{i-1} - p_{j+1} A_{i-1} b_1 b_2 \cdots b_j}{A_j B_i - A_{i-1} B_{j+1}} \tag{36}$$

が成立するクラスであるとする（後にわかるようにこのようなクラス d が存在しないこともある）．また，(1) より $b_n = 0$ であるから，(3) より

$$B_{n+1} = B_n + b_1 b_2 \cdots b_n = B_n$$

である．

定理９．(8) と (10) が成立するとき，(36) の値が正であるための必要十分条件は，(12) あるいは (13) が成立することである．

証明．（十分性）最初，(12) が成立すると仮定する．(36) の右辺において $i = 1$，$j = n$ とし，(1)，(2)，(10) を考慮すると，$p_1 A_n / (A_n + B_n) > 0$ であるから，(36) の値は正になる．次に，(13) が成立すると仮定する．このとき，(2) より $A_n = A_{n-1} = 0$ であるから，(36) の右辺において $i = 1$，$j = n-1$ とすると，(1)，(2)，(10) より $p_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1} / B_n > 0$ となり，(36) の値はやはり正になる．

（必要性）定理２の証明と同様，(12) と (13) が成立しないならば，(36) の値が正にならないことを示す．(12) と (13) が成立しないと仮定すると，定理２の場合と同様，$A_i < 0$ $(i = 1, \cdots, n-1)$，$A_n = 0$ であるから，(36) の右辺において考察すべき i と j は $i = 1, \cdots, n$，$j = n$ であり，このとき $A_n = b_n = 0$ であるから，右辺の値はゼロになり，正になることはない．□

定理 10．(8) と (10) が成立するとき，(36) の値がゼロであるための必要十分条件は，(14) が成立することである．

証明．(8) に注意すると，定理９の対偶より結論をえる．□

定理 11．(8)，(10) と (12) が成立し，(36) において

$$A_m > 0$$

であるとする．このとき，主問題 (32)−(33) の最適解は，

$$\hat{z}_i = \frac{(A_m - A_{d-1})b_1 b_2 \cdots b_{i-1} c}{A_m B_d - A_{d-1} B_{m+1}} \qquad (i = 1, \cdots, d-1)$$

$$\hat{z}_i = -\frac{A_{d-1} b_1 b_2 \cdots b_{i-1} c}{A_m B_d - A_{d-1} B_{m+1}} \qquad (i = d, \cdots, m)$$

(37)
$$\hat{z}_i = 0 \qquad (i = m+1, \cdots, n)$$

$$\hat{h}'_d = \frac{A_m b_1 b_2 \cdots b_{d-1} c}{A_m B_d - A_{d-1} B_{m+1}}, \quad \hat{h}'_{m+1} = -\frac{A_{d-1} b_1 b_2 \cdots b_m c}{A_m B_d - A_{d-1} B_{m+1}}$$

$$\hat{h}'_i = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n\,;\, i \neq d, m+1)$$

であり，双対問題(34)−(35)の最適解は,

(38-1)
$$\hat{v}_0 = \frac{p_d A_m b_1 b_2 \cdots b_{d-1} - p_{m+1} A_{d-1} b_1 b_2 \cdots b_m}{A_m B_d - A_{d-1} B_{m+1}}$$

(38-2)
$$\hat{v}_i = \frac{(A_m B_i - A_{i-1} B_{m+1})\,\hat{v}_0 + p_{m+1} A_{i-1} b_1 b_2 \cdots b_m}{A_m b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} \qquad (i = 1, \cdots, e)$$

(38-3)
$$\hat{v}_i = \frac{(A_{d-1} B_i - A_{i-1} B_d)\,\hat{v}_0 + p_d A_{i-1} b_1 b_2 \cdots b_{d-1}}{A_{d-1} b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} \qquad (i = e+1, \cdots, n)$$

である.

証明.（ⅰ）(37)が主問題の制約条件(33)の $n+1$ 個の方程式を満たすことを示す．(37)を(33)の最初の式に代入し，(2)と(3)を用いると，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\hat{z}_i &= \frac{(A_m - A_{d-1})c}{A_m B_d - A_{d-1} B_{m+1}} \sum_{i=1}^{d-1}(a_i+b_i) b_1 b_2 \cdots b_{i-1} - \frac{A_{d-1} c}{A_m B_d - A_{d-1} B_{m+1}} \sum_{i=d}^{m}(a_i+b_i) b_1 b_2 \cdots b_{i-1} \\ &= \frac{(A_m - A_{d-1})c}{A_m B_d - A_{d-1} B_{m+1}}(A_{d-1} + B_d) - \frac{A_{d-1} c}{A_m B_d - A_{d-1} B_{m+1}}(A_m - A_{d-1} + B_{m+1} - B_d) \\ &= c\end{aligned}$$

となり，(37)を(33)の２番目の式に代入すると，

$$\hat{z}_1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{z}_i + \hat{h}'_1 = \frac{(A_m - A_{d-1})c}{A_m B_d - A_{d-1} B_{m+1}}(-A_{d-1}) + \frac{A_{d-1} c}{A_m B_d - A_{d-1} B_{m+1}}(A_m - A_{d-1}) = 0$$

となる．さらに，

$$-b_{i-1}\hat{z}_{i-1} + \hat{z}_i + \hat{h}'_i = -\frac{(A_m - A_{d-1}) b_1 b_2 \cdots b_{i-1} c}{A_m B_d - A_{d-1} B_{m+1}} + \frac{(A_m - A_{d-1}) b_1 b_2 \cdots b_{i-1} c}{A_m B_d - A_{d-1} B_{m+1}} = 0 \quad (i = 2, \cdots, d)$$

$$-b_{i-1}\hat{z}_{i-1} + \hat{z}_i + \hat{h}'_i = \frac{A_{d-1} b_1 b_2 \cdots b_{i-1} c}{A_m B_d - A_{d-1} B_{m+1}} - \frac{A_{d-1} b_1 b_2 \cdots b_{i-1} c}{A_m B_d - A_{d-1} B_{m+1}} = 0 \qquad (i = d+1, \cdots, m+1)$$

となり，(33)の残りの方程式は $\hat{z}_i$ と $\hat{h}'_i$ がすべてゼロであることから満たされる．また，(2)より $B_i > 0$, (9)より $A_{d-1} < 0$ $(d \leqq e)$, 仮定より $A_m > 0$ であるから，(37)の $\hat{z}_i$ と $\hat{h}'_i$ はすべて正かゼロであり，(33)の非負性の条件も満たされる．以上より(37)は主問題の実行可能解である．

（ⅱ）(38)が双対問題の制約条件(35)の最初の n 個の不等式を満たすことを示す．(38-2)と(38-3)を各々 $i = 1, \cdots, n$ に拡張してもこれらの式は同じ i に関して等しいこと利用して証明を簡単にする．拡張した各々の式が同一であることを示すために拡張した(38-2)から拡張した(38-3)を引き，(38-1)を用いると，

$$\frac{(A_m B_i - A_{i-1} B_{m+1})\,\hat{v}_0 + p_{m+1} A_{i-1} b_1 b_2 \cdots b_m}{A_m b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} - \frac{(A_{d-1} B_i - A_{i-1} B_d)\,\hat{v}_0 + p_d A_{i-1} b_1 b_2 \cdots b_{d-1}}{A_{d-1} b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}$$

$$= \frac{A_{i-1}(A_m B_d - A_{d-1}B_{m+1})}{A_{d-1}A_m b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}\left(\hat{v}_0 - \frac{p_d A_m b_1 b_2 \cdots b_{d-1} - p_{m+1}A_{d-1}b_1 b_2 \cdots b_m}{A_m B_d - A_{d-1}B_{m+1}}\right)$$

$$= 0 \qquad\qquad (i = 1, \cdots, n)$$

となる．ゆえに，(38-2) と (38-3) は表現は異なるけれどもすべての i に関して同一の式である．

次に，拡張した (38-3) において $i = 1$ とし，(2) を用いると，

$$\hat{v}_1 = \frac{(A_{d-1} + B_d)\,\hat{v}_0 - p_d b_1 b_2 \cdots b_{d-1}}{A_{d-1}}$$

となる．この式と拡張した (38-3) を (35) の左辺に代入し，(3) を用いて整理すると，

$$(a_i + b_i)\hat{v}_0 - a_i\hat{v}_1 + \hat{v}_i - b_i\hat{v}_{i+1} = (a_i + b_i)\hat{v}_0 - a_i\left[\frac{(A_{d-1} + B_d)\,\hat{v}_0 - p_d b_1 b_2 \cdots b_{d-1}}{A_{d-1}}\right]$$

$$+ \frac{(A_{d-1}B_i - A_{i-1}B_d)\,\hat{v}_0 + p_d A_{i-1} b_1 b_2 \cdots b_{d-1}}{A_{d-1}b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} - b_i\left[\frac{(A_{d-1}B_{i+1} - A_i B_d)\,\hat{v}_0 + p_d A_i b_1 b_2 \cdots b_{d-1}}{A_{d-1}b_1 b_2 \cdots b_i}\right]$$

$$= \frac{[A_{d-1}(b_1 b_2 \cdots b_i + B_i - B_{i+1}) - B_d(a_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1} + A_{i-1} - A_i)]\,\hat{v}_0 + p_d b_1 b_2 \cdots b_{d-1}(a_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1} + A_{i-1} - A_i)}{A_{d-1}b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}$$

$$= 0 \qquad\qquad (i = 1, \cdots, n-1)$$

となる．(2)，(3)，(38-3) を用い，$b_n = 0$ に注意すると，$i = n$ に対して (35) は

$$a_n\hat{v}_0 - a_n\hat{v}_1 + \hat{v}_n = \left[a_n - \frac{(A_{d-1} + B_d)a_n}{A_{d-1}} + \frac{(A_{d-1}B_n - A_{n-1}B_d)}{A_{d-1}b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}\right]\hat{v}_0$$

$$+ \frac{p_d b_1 b_2 \cdots b_{d-1}(a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1} + A_{n-1})}{A_{d-1}b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}$$

$$= \frac{(A_{d-1}B_n - A_n B_d)}{A_{d-1}b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}\left(\hat{v}_0 - \frac{p_d A_n b_1 b_2 \cdots b_{d-1}}{A_n B_d - A_{d-1}B_n}\right) \geqq 0$$

となる．ここで，$A_{d-1} < 0$，$A_n > 0$，$B_d > 0$，$B_n > 0$ であるから，上式の積の第 1 項は正，積の第 2 項の括弧内は (36) の左辺の値 $\hat{v}_0$ と右辺において（$B_{n+1} = B_n$ に注意）$i = d$，$j = n$ としたときの値との差であるから，非負である．したがって，上式は非負である．以上より (38) は (35) の最初の n 個の不等式を満たす．

（iii）(38) が (35) の後半の n 個の不等式を満たすことを示す．そのために (38-2) を

$$\hat{v}_i = \frac{(A_m B_i - A_{i-1}B_{m+1})}{A_m b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}\left(\hat{v}_0 - \frac{p_i A_m b_1 b_2 \cdots b_{i-1} - p_{m+1}A_{i-1}b_1 b_2 \cdots b_m}{A_m B_i - A_{i-1}B_{m+1}}\right) + p_i \qquad (i=1, \cdots, e)$$

と表す．ここで，$A_{i-1} < 0\ (i \in I)$，仮定より $A_m > 0$，$B_i > 0$ であるから，上式の積の第 1 項は正，積の第 2 項の括弧内は (36) の左辺の値 $\hat{v}_0$ と右辺において $j = m$ としたときの値との差であるから非負である．したがって，上式より

$$\hat{v}_i \geqq p_i \qquad (i = 1, \cdots, e)$$

が成立する．同様に，(38-3) を $i = j$ として

$$\hat{v}_j = -\frac{(A_{j-1}B_d - A_{d-1}B_j)}{A_{d-1}b_1 b_2 \cdots b_{j-1}}\left(\hat{v}_0 - \frac{p_d A_{j-1} b_1 b_2 \cdots b_{d-1} - p_j A_{d-1} b_1 b_2 \cdots b_{j-1}}{A_{j-1}B_d - A_{d-1}B_j}\right) + p_j \quad (j = e+1, \cdots, n)$$

と表す．この積の第 1 項は $A_{d-1} < 0\ (d \in I)$，$A_{j-1} \geqq 0\ (j \in J)$ より正，積の第 2 項の括弧の中は (36) の左辺の値 $\hat{v}_0$ と右辺において $i = d$ としたときの値との差であるから非負である．ゆえに，

$$\hat{v}_j \geqq p_j \qquad (j = e+1, \cdots, n)$$

が成立する．以上の（ⅱ）と（ⅲ）より (38) は双対問題 (34)－(35) の実行可能解である．

（ⅳ）最後に，(37) と (38) より

$$\hat{f}' = \sum_{i=1}^{n} p_i \hat{h}'_i = \frac{(p_d A_m b_1 b_2 \cdots b_{d-1} - p_{m+1} A_{d-1} b_1 b_2 \cdots b_m) c}{A_m B_d - A_{d-1} B_{m+1}} = c\hat{v}_0$$

が成立する．したがって，双対定理より (37) が主問題 (32)－(33) の最適解であり，(38) が双対問題 (34)－(35) の最適解である．　□

定理 12. (8)，(10) と (12) が成立し，(36) において

$$A_m = 0$$

であるとする．このとき，主問題 (32)－(33) の最適解は，

(39)
$$\hat{z}_i = \frac{b_1 b_2 \cdots b_{i-1} c}{B_{m+1}} \quad (i = 1, \cdots, m), \qquad \hat{z}_i = 0 \qquad (i = m+1, \cdots, n)$$
$$\hat{h}'_{m+1} = \frac{b_1 b_2 \cdots b_m c}{B_{m+1}}, \qquad \hat{h}'_i = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n\,;\, i \neq m+1)$$

であり，双対問題 (34)－(35) の最適解は，

(40-1)
$$\hat{v}_0 = \frac{p_{m+1} b_1 b_2 \cdots b_m}{B_{m+1}}$$

(40-2)
$$\max_{i=1,\cdots,e} \frac{(A_{i-1} + B_i)\,\hat{v}_0 - p_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}{A_{i-1}} \leqq \hat{v}_1 \leqq \min_{\substack{j=e,\cdots,n \\ A_j>0}} \frac{(A_j + B_{j+1})\,\hat{v}_0 - p_{j+1} b_1 b_2 \cdots b_j}{A_j}$$

(40-3)
$$\hat{v}_i = \frac{(A_{i-1} + B_i)\,\hat{v}_0 - A_{i-1}\hat{v}_1}{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} \qquad (i = 2, \cdots, n)$$

である．

証明.（ⅰ）(39) が主問題の制約条件 (33) を満たすことを示す．(39) を (33) の最初の式に代入し，$A_m = 0$ に注意すると，

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\,\hat{z}_i = \frac{(A_m + B_{m+1})\,c}{B_{m+1}} = c$$

となり，２番目の式に代入すると，

$$\hat{z}_1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{z}_i + \hat{h}'_1 = -\frac{A_m c}{B_{m+1}} = 0$$

となる．さらに，

$$-b_{i-1}\hat{z}_{i-1} + \hat{z}_i + \hat{h}'_i = -\frac{b_1 b_2 \cdots b_{i-1} c}{B_{m+1}} + \frac{b_1 b_2 \cdots b_{i-1} c}{B_{m+1}} = 0 \qquad (i = 2, \cdots, m+1)$$

が成立し，(33) の残りの方程式は $\hat{z}_i$ と $\hat{h}'_i$ がゼロであるから満たされる．(33) の非負性の条件は (39) の $\hat{z}_i$ と $\hat{h}'_i$ がすべて正かゼロであるので満たされる．

（ⅱ）最初に，(40-2) における $\hat{v}_1$ の下限を表す左辺の値と上限を表す右辺の値が無矛盾であることを示す．(40-2) の右辺の任意の式から左辺の任意の式を引き，整理すると，

$$\frac{(A_j + B_{j+1})\,\hat{v}_0 - p_{j+1} b_1 b_2 \cdots b_j}{A_j} - \frac{(A_{i-1} + B_i)\,\hat{v}_0 - p_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}{A_{i-1}}$$
$$= \frac{(A_{i-1} B_{i+1} - A_j B_i)}{A_{i-1} A_j} \left(\hat{v}_0 - \frac{p_i A_j b_1 b_2 \cdots b_{i-1} - p_{j+1} A_{i-1} b_1 b_2 \cdots b_j}{A_j B_i - A_{i-1} B_{j+1}} \right) \geqq 0$$

となる．$A_{i-1} < 0\ (i \in I)$，$B_i > 0$，仮定より $A_j > 0\ (j \in J)$ であるから，上式の積の第１項は正，積の第２項の括弧の中は (36) の左辺の値 $\hat{v}_0$ と右辺の値との差であるから，非負である．これらより上式は非負であり，したがって $\hat{v}_1$ を定める上限と下限は無矛盾である．

（ⅲ）(40) が双対問題の制約条件 (35) の前半の n 個の不等式を満たすことを明らかにする．(40-3) を (35) の左辺に代入し，(3) を用いて整理すると，

$$(a_i + b_i)\,\hat{v}_0 - a_i\hat{v}_1 + \hat{v}_i - b_i\hat{v}_{i+1}$$
$$= \frac{[(a_i + b_i)b_1b_2\cdots b_{i-1} + A_{i-1} + B_i - A_i - B_{i+1}]\,\hat{v}_0}{b_1b_2\cdots b_{i-1}} - \frac{(a_ib_1b_2\cdots b_{i-1}+A_{i-1} - A_i)\,\hat{v}_1}{b_1b_2\cdots b_{i-1}}$$
$$= 0 \qquad\qquad (i = 1, \cdots, n-1)$$

であり，$i = n$ に対して

$$a_n\hat{v}_0 - a_n\hat{v}_1 + \hat{v}_n = \frac{(a_nb_1b_2\cdots b_{n-1} + A_{n-1} + B_n)\,\hat{v}_0}{b_1b_2\cdots b_{n-1}} - \frac{(a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}+A_{n-1})\,\hat{v}_1}{b_1b_2\cdots b_{n-1}}$$
$$= \frac{(A_n + B_n)}{b_1b_2\cdots b_{n-1}}\left(\hat{v}_0 - \frac{A_n}{A_n + B_n}\hat{v}_1\right) \geqq 0$$

となる．(40-2) の右側の式において $j = n$ とし，$b_n = 0$ と $B_{n+1} = B_n$ に注意すると，上式は非負である．よって (35) の前半の n 個の不等式が満たされる．

（ⅳ）(40) が (35) の後半の n 個の不等式を満たすことを示す．最初，(40-2) の左側の式において $i = 1$ とし，(2) を用いると，

$$\hat{v}_1 \geqq p_1$$

をえる．次に，(40-3) を用いると，任意の i に対して

(41)
$$\hat{v}_i - p_i = \frac{(A_{i-1} + B_i)\,\hat{v}_0 - (A_{i-1}\hat{v}_1 + p_ib_1b_2\cdots b_{i-1})}{b_1b_2\cdots b_{i-1}}$$

となる．(9) より $A_{i-1} < 0\ (i \in I)$ であるから，(40-2) の左側の式より

$$A_{i-1}\hat{v}_1 \leqq (A_{i-1} + B_i)\,\hat{v}_0 - p_ib_1b_2\cdots b_{i-1} \qquad (i \in I)$$

が成立する．これを用いると，(41) は非負であり，したがって

$$\hat{v}_i \geqq p_i \qquad (i = 2, \cdots, e)$$

が成立する．また，$A_j = 0\ (j \in J)$ であるときには，(36) より

$$\hat{v}_0 \geqq \frac{p_jb_1b_2\cdots b_{j-1}}{B_j}$$

が成立するから，これと (41) より

$$\hat{v}_j \geqq p_j \qquad (A_j = 0,\ j \in J)$$

が成り立つ．さらに，$A_j > 0\ (j \in J)$ であるときには (40-2) の右側の式より

$$(A_j + B_{j+1})\,\hat{v}_0 \geqq A_j\hat{v}_1 + p_{j+1}b_1b_2\cdots b_j$$

であるから，これと (41) において $i = j-1$ とした式より

$$\hat{v}_j \geqq p_j \qquad (A_j > 0,\ j \in J)$$

が成立する．ゆえに，(40) は (35) の後半の n 個の不等式も満たす．以上の（ⅱ）と（ⅲ）より (40) は双対問題 (34)−(35) の実行可能解である．

（ｖ）実行可能解(39)に対する目的関数(32)の値と実行可能解(40)に対する目的関数(34)の値は,

$$\hat{f}' = \sum_{i=1}^{n} p_i \hat{h}_i' = \frac{p_{m+1} b_1 b_2 \cdots b_m c}{B_{m+1}} = c\hat{v}_0$$

となって等しいので, (39)が主問題(32)－(33)の最適解であり, (40)が双対問題(34)－(35)の最適解である. □

定理 13. (8), (10)と(13)が成立するとき, 主問題(32)－(33)の最適解は,

$$\hat{z}_i = \frac{b_1 b_2 \cdots b_{i-1} c}{B_{m+1}} \quad (i = 1, \cdots, m), \quad \hat{z}_i = 0 \quad (i = m+1, \cdots, n)$$

(42)

$$\hat{h}_{m+1}' = \frac{b_1 b_2 \cdots b_m c}{B_{m+1}}, \qquad \hat{h}_i' = 0 \quad (i = 1, \cdots, n \,;\, i \neq m+1)$$

であり, 双対問題(34)－(35)の最適解は,

(43-1)
$$\hat{v}_0 = \frac{p_{m+1} b_1 b_2 \cdots b_m}{B_{m+1}}$$

(43-2)
$$\hat{v}_1 = \max_{i=1,\cdots,e} \frac{(A_{i-1} + B_i)\,\hat{v}_0 - p_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}{A_{i-1}}$$

(43-3)
$$\hat{v}_i = \frac{(A_{i-1} + B_i)\,\hat{v}_0 - A_{i-1}\hat{v}_1}{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} \qquad (i = 2, \cdots, e)$$

(43-4)
$$\hat{v}_i = \frac{B_i \hat{v}_0}{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} \qquad (i = e+1, \cdots, n)$$

である.

証明. （ｉ）(42)が制約条件を満たすことは定理12の(ｉ)の場合と同様にして示すことができるので, 省略する.

（ii）(43)が制約条件(35)の前半の n 個の不等式を満たすことを示す. (43-3)を(35)の左辺に代入し, (3)を用いて整理すると,

$$(a_i + b_i)\hat{v}_0 - a_i\hat{v}_1 + \hat{v}_i - b_i\hat{v}_{i+1} = (a_i + b_i)\,\hat{v}_0 - a_i\hat{v}_1 + \frac{(A_{i-1} + B_i)\,\hat{v}_0 - A_{i-1}\hat{v}_1}{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}$$
$$- b_i \frac{(A_i + B_{i+1})\,\hat{v}_0 - A_i\hat{v}_1}{b_1 b_2 \cdots b_i}$$
$$= \frac{(A_i + B_{i+1} - A_i - B_{i+1})\,\hat{v}_0}{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} - \frac{(A_i - A_i)\,\hat{v}_1}{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} = 0 \qquad (i = 1, \cdots, e-1)$$

となる. また, (13)より $A_e = 0, a_e > 0, A_{j+1} = a_{j+1} = 0 \quad (j \in J)$ でなければならないから, (43-3), (43-4)と(3)を用いて

$$(a_e + b_e)\,\hat{v}_0 - a_e\hat{v}_1 + \hat{v}_e - b_e\hat{v}_{e+1} = \frac{(A_e + B_{e+1} - B_{e+1})\,\hat{v}_0}{b_1 b_2 \cdots b_{e-1}} - \frac{A_e\hat{v}_1}{b_1 b_2 \cdots b_{e-1}} = 0$$

となる. さらに, (9)より $A_{e-1} < 0$, $A_e = \cdots = A_n = 0$ であり, これらより $a_e > 0$, $a_{e+1} = \cdots = a_n = 0$ であるので, (43-4)と(3)より

$$(a_i+b_i)\hat{v}_0-a_i\hat{v}_1+\hat{v}_i-b_i\hat{v}_{i+1}=b_i\hat{v}_0+\frac{B_i\hat{v}_0}{b_1b_2\cdots b_{i-1}}-\frac{B_{i+1}\hat{v}_0}{b_1b_2\cdots b_{i-1}}=0 \qquad (i=e+1,\cdots,\ n-1)$$

となる．最後に，$A_{n-1}=0$，$p_n>0$ であるから，(36) の右辺において $j=n-1$ としたときの値と (36) の左辺の値に等しい (43-1) の $\hat{v}_0$ は，

$$\hat{v}_0 \geqq \frac{p_nb_1b_2\cdots b_{n-1}}{B_n}>0$$

という関係にある．この不等式と $a_n=0$ より (35) の $i=n$ に対する不等式は，

$$a_n\hat{v}_0-a_n\hat{v}_1+\hat{v}_n=\hat{v}_n=\frac{B_n\hat{v}_0}{b_1b_2\cdots b_{n-1}}>0$$

となって満たされる．以上より (43) は (35) の前半の n 個の不等式を満たす．

（iii）(43) が (35) の後半の n 個の不等式を満たすことを示す．(43-2) において $i=1$ とし，(2) を用いると，

$$\hat{v}_1 \geqq \frac{(A_0+B_1)\hat{v}_0-p_1b_0}{A_0}=p_1$$

が成立する．(9) より $A_{i-1}<0$ $(i\in I)$ であることに注意すると，(43-2) より

$$A_{i-1}\hat{v}_1 \leqq (A_{i-1}+B_i)\,\hat{v}_0-p_ib_1b_2\cdots b_{i-1} \qquad (i=1,\cdots,\ e)$$

をえる．(43-3) とこの不等式より

$$\hat{v}_i-p_i=\frac{(A_{i-1}+B_i)\,\hat{v}_0-(A_{i-1}\hat{v}_1+p_ib_1b_2\cdots b_{i-1})}{b_1b_2\cdots b_{i-1}}\geqq 0 \qquad (i=2,\cdots,\ e)$$

となり，これより

$$\hat{v}_i \geqq p_i \qquad (i=2,\cdots,\ e)$$

をえる．さらに，(43-4) において $i=j+1$ とすると，

$$\hat{v}_{j+1}-p_{j+1}=\frac{B_{j+1}}{b_1b_2\cdots b_j}\left(\hat{v}_0-\frac{p_{j+1}b_1b_2\cdots b_j}{B_{j+1}}\right)\geqq 0 \qquad (j=e,\cdots,\ n-1)$$

をえる．上式の括弧の中は，$A_{j-1}=0$ $(j\in J)$ であることに注意すると，(36) の左辺の値 $\hat{v}_0$ と右辺の値との差であるから，非負である．したがって，

$$v_{j+1} \geqq p_{j+1} \qquad (j=e,\cdots,\ n-1)$$

が成立する．（ii）と（iii）より (43) は双対問題の実行可能解である．

（iv）(42) に対する目的関数 (32) の値と (43) に対する目的関数 (34) の値は，

$$\hat{f}'=\sum_{i=1}^{n}p_i\hat{h}_i'=\frac{p_{m+1}b_1b_2\cdots b_mc}{B_{m+1}}=c\hat{v}_0$$

となって等しいので，(42) が主問題 (32)−(33) の最適解であり，(43) が双対問題 (34)−(35) の最適解である．　□

定理 14. (8)，(10) と (14) が成立するとき，主問題 (32)−(33) の最適解は，

(44)
$$\hat{z}_i=\frac{b_1b_2\cdots b_{i-1}c}{B_n}, \qquad \hat{h}_i'=0 \quad (i=1,\cdots,\ n)$$

であり，双対問題 (34)−(35) の最適解は，

(45-1) $$\hat{v}_0 = 0$$

(45-2) $$\hat{v}_1 = \max_{i=1,\cdots,n} -\frac{p_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1}}{A_{i-1}}$$

(45-3) $$\hat{v}_i = -\frac{A_{i-1}\hat{v}_1}{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} \qquad (i = 2, \cdots, n)$$

である．

証明．（ⅰ）(14) の $A_n = 0$ に注意すると，(44) が (33) を満たすことは定理 12 の（ⅰ）の場合と同様に示すことができるので，省略する．

（ⅱ）(45) が制約条件 (35) の前半の n 個の不等式を満たすことを示す．(45-1) と (45-3) を (35) の左辺に代入し，(3) を用いると，

$$(a_i + b_i)\hat{v}_0 - a_i\hat{v}_1 + \hat{v}_i - b_i\hat{v}_{i+1} = -\frac{(a_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1} + A_{i-1} - A_i)\hat{v}_1}{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n-1)$$

となり，$i = n$ のとき，(14) を考慮すると，

$$(a_n + b_n)\hat{v}_0 - a_n\hat{v}_1 + \hat{v}_n = -\frac{(a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1} + A_{n-1})\hat{v}_1}{b_1 b_2 \cdots b_{n-1}} = 0$$

が成立する．ゆえに，(35) の前半の n 個の不等式が満たされる．

（ⅲ）(45) が (35) の後半の n 個の不等式を満たすことを示す．(45-2) において $i = 1$ とすると，

$$\hat{v}_1 \geqq -\frac{p_1 b_0}{A_0} = p_1$$

が成立する．$A_{i-1} < 0$ $(i = 2, \cdots, n)$ に注意すると，(45-2) より

$$A_{i-1}\hat{v}_1 \leqq -p_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1} \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

をえる．(45-3) とこの不等式より

$$\hat{v}_i - p_i = -\frac{(A_{i-1}\hat{v}_1 + p_i b_1 b_2 \cdots b_{i-1})}{b_1 b_2 \cdots b_{i-1}} \geqq 0 \qquad (i = 2, \cdots, n)$$

であるから，

$$\hat{v}_i \geqq p_i \qquad (i = 2, \cdots, n)$$

がえられる．よって，(35) の後半の n 個の不等式も満たされる．

（ⅳ）(44) に対する目的関数 (32) の値と (45) に対する目的関数 (34) の値がともにゼロで等しいので，(44) が主問題 (32)－(33) の最適解であり，(45) が双対問題 (34)－(35) の最適解である．　□

７．期末収穫問題と期首収穫問題の総収入の比較

期末収穫問題の目的関数の最大値と期首収穫問題の目的関数の最大値に関して次の定理が成立する．

定理 15． Leslie 行列が (12) あるいは (13) を満たすならば，期末収穫問題の目的関数 (4) の最大値 f^* と期首収穫問題の目的関数 (32) の最大値 $\hat{f}'$ との間に

(46) $$f^* > \hat{f}' > 0$$

という関係が成立し，(14) を満たすならば，

(47)
$$f^* = \hat{f}' = 0$$
という関係が成立する．また，これらの逆も成立する．

証明．(11) の右辺と (36) の右辺を同じ i と j について比較する．(11) の右辺から (36) の右辺を引き，(3) を用いて整理すると，$i \in I$，$j \in J$ に対して

(48)
$$\begin{aligned}&\frac{p_iA_jb_1b_2\cdots b_{i-1} - p_{j+1}A_{i-1}b_1b_2\cdots b_j}{A_jB_{i-1} - A_{i-1}B_j} - \frac{p_iA_jb_1b_2\cdots b_{i-1} - p_{j+1}A_{i-1}b_1b_2\cdots b_j}{A_jB_i - A_{i-1}B_{j+1}}\\ &= \frac{(p_iA_jb_1b_2\cdots b_{i-1} - p_{j+1}A_{i-1}b_1b_2\cdots b_j)}{(A_jB_{i-1} - A_{i-1}B_j)(A_jB_i - A_{i-1}B_{j+1})}(A_jb_1b_2\cdots b_{i-1} - A_{i-1}b_1b_2\cdots b_j)\end{aligned}$$

となる．(1)，(2)，(9)，(10) より (48) の右辺の積の第１項と第２項は非負であるから，(48) は非負である．特に，(14) が成立するとき，$I = \{1,\cdots, n-1\}$，$J = \{n\}$，$A_n = 0$ であり，(1) より $b_n = 0$ であるから，(48) の右辺はゼロになる．これ以外の (12) あるいは (13) が成立するとき，(48) は正になる．また，これらの逆も成立する．

期末収穫問題の最適解に関する定理４から７までいずれの場合にも (11) の左辺の値はそれぞれの u_0^* に等しく，
$$f^* = cu_0^*$$
が成立し，期首収穫問題の最適解に関する定理 11 から 14 までいずれの場合にも (36) の左辺の値はそれぞれの $\hat{v}_0$ に等しく，
$$\hat{f}' = c\hat{v}_0$$
が成立するので，(48) より

(49)
$$f^* = \frac{(p_gA_kb_1b_2\cdots b_{g-1} - p_{k+1}A_{g-1}b_1b_2\cdots b_k)\,c}{A_kB_{g-1} - A_{g-1}B_k} \geqq \frac{(p_dA_mb_1b_2\cdots b_{d-1} - p_{m+1}A_{d-1}b_1b_2\cdots b_m)\,c}{A_mB_d - A_{d-1}B_{m+1}} = \hat{f}'$$

が成立する．(48)，(49) とこれらの大小関係に関する条件，定理２, ３, ９ ,10 を考慮すると，結論をえる．　□

定理 16．各クラスの個体の価格 p_i が

(50)
$$p_i = 1 \qquad (i = 1,\cdots,n)$$

であるならば，期末収穫問題 (4)−(5) の最適解における収穫するクラスと期首収穫問題 (32)−(33) の最適解における収穫するクラスは等しい，すなわち，

(51)
$$g = d, \qquad k = m$$

が成立する．

証明．(50) を考慮し，(11) の右辺において $i = d$，$j = m$ とすると，

(52)
$$\frac{A_kb_1b_2\cdots b_{g-1} - A_{g-1}b_1b_2\cdots b_k}{A_kB_{g-1} - A_{g-1}B_k} \geqq \frac{A_mb_1b_2\cdots b_{d-1} - A_{d-1}b_1b_2\cdots b_m}{A_mB_{d-1} - A_{d-1}B_m}$$

をえる．同様に，(50) を考慮し，(36) において $i = g$，$j = k$ とすると，

(53)
$$\frac{A_mb_1b_2\cdots b_{d-1} - A_{d-1}b_1b_2\cdots b_m}{A_mB_d - A_{d-1}B_{m+1}} \geqq \frac{A_kb_1b_2\cdots b_{g-1} - A_{g-1}b_1b_2\cdots b_k}{A_kB_g - A_{g-1}B_{k+1}}$$

をえる．ここで，(2) よりすべての $B_i > 0$，(9)，(11)，(36) より $A_{g-1} < 0$，$A_k \geqq 0$，$A_{d-1} < 0$，$A_m \geqq 0$ であるから，(53) の両辺の分母は正である．また，(3) より
$$A_kB_g = A_k(B_{g-1} + b_1b_2\cdots b_{g-1}), \qquad A_{g-1}B_{k+1} = A_{g-1}(B_k + b_1b_2\cdots b_k)$$

$$A_mB_d = A_m(B_{d-1} + b_1b_2\cdots b_{d-1}), \qquad A_{d-1}B_{m+1} = A_{d-1}(B_m + b_1b_2\cdots b_m)$$

であるから，これらを用いて (53) を整理すると，

$$(A_kB_{g-1} - A_{g-1}B_k)(A_mb_1b_2\cdots b_{d-1} - A_{d-1}b_1b_2\cdots b_m)$$
$$\geqq (A_mB_{d-1} - A_{d-1}B_m)(A_kb_1b_2\cdots b_{g-1} - A_{g-1}b_1b_2\cdots b_k)$$

をえる．この両辺の第１項はともに正であるから，これより

(54)
$$\frac{A_mb_1b_2\cdots b_{d-1} - A_{d-1}b_1b_2\cdots b_m}{A_mB_{d-1} - A_{d-1}B_m} \geqq \frac{A_kb_1b_2\cdots b_{g-1} - A_{g-1}b_1b_2\cdots b_k}{A_kB_{g-1} - A_{g-1}B_k}$$

となる．したがって，(52) と (54) より

$$\frac{A_kb_1b_2\cdots b_{g-1} - A_{g-1}b_1b_2\cdots b_k}{A_kB_{g-1} - A_{g-1}B_k} = \frac{A_mb_1b_2\cdots b_{d-1} - A_{d-1}b_1b_2\cdots b_m}{A_mB_{d-1} - A_{d-1}B_m}$$

をえる．これより (36) の２つのクラス d と m は (11) の最大値を達成し，(11) の g と k は (36) の最大値を達成する．よって，(51) が成立する．　□

８．数値例

例題　(8) を満たす Leslie 行列，各クラスの個体の価格，群全体の個体数を

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = 1,\ p_2 = 4,\ p_3 = 18,\ c = 90$$

とする．

このとき，期末収穫問題 (4)−(5) は，

$$f = h_1 + 4h_2 + 18h_3$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 90 \\
-6x_2 - 12x_3 + h_1 &= 0 \\
-(1/2)x_1 + x_2 + h_2 &= 0 \\
-(1/3)x_2 + x_3 + h_3 &= 0 \\
x_i \geqq 0,\ h_i \geqq 0 \quad (i &= 1, 2, 3)
\end{aligned}$$

となり，双対問題 (6)−(7) は，

$$90\,u_0$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$\begin{aligned}
u_0 - (1/2)u_2 &\geqq 0 \\
u_0 - 6u_1 + u_2 - (1/3)u_3 &\geqq 0 \\
u_0 - 12u_1 + u_3 &\geqq 0 \\
u_1 &\geqq 1 \\
u_2 &\geqq 4 \\
u_3 &\geqq 18
\end{aligned}$$

となる．Leslie 行列と定義より

$$A_0 = -1,\quad A_1 = a_1 - 1 = 0,\quad A_2 = A_1 + a_2 b_1 = 3,\quad A_3 = A_2 + a_3 b_1 b_2 = 5$$
$$B_0 = 0,\quad B_1 = 1,\quad B_2 = 1 + b_1 = 3/2,\quad B_3 = B_2 + b_1 b_2 = 5/3$$

である．$A_3 > 0$ であるから，(12) が成立し，$A_j \geqq 0$ となる最初の j は 1 であるから，(9) の定義より $e = 1$ である．したがって，(11) の右辺は

$$\max_{\substack{i=1\\ j=1,2,3}} \frac{p_i A_j b_1 b_2 \cdots b_{i-1} - p_{j+1} A_{i-1} b_1 b_2 \cdots b_j}{A_j B_{i-1} - A_{i-1} B_j}$$

となる．上式は $i = 1$，$j = 2$ のとき最大で，最大値は，

$$\frac{p_1 A_2 b_0 - p_3 A_0 b_1 b_2}{A_2 B_0 - A_0 B_2} = \frac{p_1 A_2 + p_3 b_1 b_2}{B_2} = \frac{3+18(1/6)}{3/2} = 4$$

であるから，(11) において $g = 1$，$k = 2$ であり，$A_k = A_2 = 3$ である．したがって，定理 4 の (15) と (16) より主問題と双対問題の最適解は，

$$x_1^* = -\frac{A_0 b_0 c}{A_2 B_0 - A_0 B_2} = \frac{2\times 90}{3} = 60,\quad x_2^* = -\frac{A_0 b_1 c}{A_2 B_0 - A_0 B_2} = \frac{90}{3} = 30,\quad x_3^* = 0$$

$$h_1^* = \frac{A_2 b_0 c}{A_2 B_0 - A_0 B_2} = 180,\quad h_2^* = 0,\quad h_3^* = -\frac{A_0 b_1 b_2 c}{A_2 B_0 - A_0 B_2} = 10$$

$$u_0^* = \frac{p_1 A_2 b_0 - p_3 A_0 b_1 b_2}{A_2 B_0 - A_0 B_2} = \frac{3 + 18(1/6)}{3/2} = 4$$

$$u_1^* = \frac{(A_2 B_0 - A_0 B_2)\, u_0^* + p_3 A_0 b_1 b_2}{A_2 b_0} = \frac{(3/2)\times 4 - 18(1/6)}{3} = 1 = p_1$$

$$u_2^* = \frac{(A_0 B_1 - A_1 B_0)\, u_0^* + p_1 A_1 b_0}{A_0 b_1} = \frac{-4-0}{-1/2} = 8 > p_2$$

$$u_3^* = \frac{(A_0 B_2 - A_2 B_0)\, u_0^* + p_1 A_2 b_0}{A_0 b_1 b_2} = \frac{(-3/2)\times 4 + 3}{-1/6} = 18 = p_3$$

となり，

$$f^* = p_1 h_1^* + p_3 h_3^* = 360 = c u_0^*$$

である．

期首収穫問題 (32)−(33) は，

$$f' = h_1' + 4h_2' + 18h_3'$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$\begin{aligned}
(3/2)z_1 + (19/3)z_2 + 12z_3 \qquad\qquad &= 90\\
-6z_2 - 12z_3 + h_1' \qquad &= 0\\
-(1/2)z_1 + z_2 \qquad + h_2' \quad &= 0\\
-(1/3)z_2 + z_3 \qquad + h_3' &= 0\\
z_i \geqq 0,\ h_i' \geqq 0 \quad (i = 1, 2, 3)&
\end{aligned}$$

となり，双対問題 (34)−(35) は

$$90\, v_0$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$
\begin{array}{rrrrl}
(3/2)v_0 & & -(1/2)v_2 & & \geqq 0 \\
(19/3)v_0 & -6v_1 & +v_2 & -(1/3)v_3 & \geqq 0 \\
12v_0 & -12v_1 & & +v_3 & \geqq 0 \\
 & v_1 & & & \geqq 1 \\
 & & v_2 & & \geqq 4 \\
 & & & v_3 & \geqq 18
\end{array}
$$

となる．(36) の右辺は $e=1$ より

$$\max_{\substack{i=1\\ j=1,2,3}} \frac{p_iA_jb_1b_2\cdots b_{i-1}-p_{j+1}A_{i-1}b_1b_2\cdots b_j}{A_jB_i-A_{i-1}B_{j+1}}$$

となる．これは $i=1$，$j=1$ のとき最大になり，最大値は

$$\frac{p_1A_1b_0-p_2A_0b_1}{A_1B_1-A_0B_2}=\frac{p_2b_1}{B_2}=\frac{4\times(1/2)}{3/2}=\frac{4}{3}$$

であるから，$m=1$ であり，$A_m=A_1=0$ である．したがって，定理 12 の (39) より主問題の最適解は，

$$\hat{z}_1=\frac{b_0c}{B_2}=60,\ \hat{z}_2=\hat{z}_3=0,\ \hat{h}_1=0,\ \hat{h}_2=\frac{b_1c}{B_2}=30,\ \hat{h}_3=0$$

であり，双対問題の最適解は，$b_3=0$，$B_4=B_3$ に注意すると，(40) より

$$\hat{v}_0=\frac{p_2b_1}{B_2}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{(A_0+B_1)\,\hat{v}_0-p_1b_0}{A_0}=1\leqq\hat{v}_1\leqq\min\left[\frac{(A_2+B_3)\,\hat{v}_0-p_3b_1b_2}{A_2},\ \frac{(A_3+B_3)\,\hat{v}_0}{A_3}\right]=\frac{29}{27}$$

$$\hat{v}_2=\frac{(A_1+B_2)\,\hat{v}_0-A_1\hat{v}_1}{b_1}=4,\ \hat{v}_3=\frac{(A_2+B_3)\,\hat{v}_0-A_2\hat{v}_1}{b_1b_2}=\frac{112}{3}-18\hat{v}_1$$

であり，

$$\hat{v}_1=(1-\theta)+\frac{29}{27}\theta,\ \hat{v}_3=\frac{58}{3}(1-\theta)+18\theta\quad(0\leqq\theta\leqq1)$$

である．このとき，

$$\hat{f}'=p_2\hat{h}_2'=120=c\hat{v}_0$$

であり，(12) が成立するので，定理 15 の (46)，すなわち

$$f^*=360>120=\hat{f}'$$

が成立している．

以上の結果は各々の問題をシンプレックス法で解くことによって確認できる．

参考文献

［1］Anton, H., and Rorres, C., *Elementary Linear Algebra with Applications*. New York : John Wiley & Sons, 1987.

［2］Beddington, J. R., and Taylor, D. B., "Optimum Age Specific Harvesting of a Population," *Biometrics*, Vol. 29 (1973), pp. 801-9.

［3］Doubleday, W. G., "Harvesting in Matrix Population Models," *Biometrics*, Vol. 31 (1975), pp. 189-200.

［4］Gale, D., *The Theory of Linear Economic Models*. New York : McGraw-Hill Book Co., 1960.

［５］ Goldman, A. J., and Tucker, A. W., "Theory of Linear Programming," in Kuhn, H. W., and Tucker, A. W. (eds.), *Linear Inequalities and Related Systems*. Princeton, N. J. : Princeton University Press, 1956, pp. 53-97.

［６］ Hadley, G., *Linear Programming*. Reading, Mass. : Addison-Wesley Publishing Co., 1962.

［７］ Karlin, S., *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics*. Vol. I, Reading, Mass. : Addison-Wesley Publishing Co., 1959.

［８］ Krekó, B., *Linear Programming*. London : Sir Isaac Pitman & Sons, 1968.

［９］ Lefkovitch, L. P., "A Theoretical Evaluation of Population Growth after Removing Individuals from Some Age Groups," *Bulletin of Entmological Research*, Vol. 57 (1967), pp. 437-45.

[10] Leslie, P. H., "On the Use of Matrices in Certain Population Mathematics," *Biometrika*, Vol. 33 (1945), pp. 183-212.

[11] Leslie, P. H., "Some Further Notes on the Use of Matrices in Population Mathematics," *Biometrika*, Vol. 35 (1948), pp. 213-45.

[12] Lewis, E. G., "On the Generation and Growth of a Population," *Sankhya*, Vol. 6 (1942), pp. 93-6.

[13] Murty, K. G., *Linear Programming*. New York : John Wiley & Sons, 1983.

[14] 尾崎雄一郎,「Leslie 行列に基づいた期首収穫問題と期末収穫問題の比較」,『名城商学』, 第 42 巻, 第２号（1992 年）, pp. 1-15.

[15] 尾崎雄一郎・永田達哉,「Leslie 行列に基づいた期末収穫問題と期首収穫問題の関連」,『名城論叢』, 第９巻, 第３号（2008 年）, pp. 45-64.