# Chebyshev 基準による高次の回帰曲線

尾　崎　雄一郎

## １．はじめに

与えられた観測値に対する回帰直線(曲線)は最小自乗法によって求める以外に偏差の絶対値の和($L_1$ ノルム)を最小にする最小絶対値法や偏差の絶対値の最大値($L_\infty$ ノルム)を最小にする Chebyshev 基準(ミニマックス法)と呼ばれる方法によって求めることができる．これら３つの方法の中で Chebyshev 基準による方法が最も古く，1749 年に L. Euler によって考え出された.[1] P. S. Laplace は地球の形状を知るために 1786 年から 99 年にかけて最小絶対値法や Chebyshev 基準を用い,[2] 1793 年に Chebyshev 基準による回帰直線の特徴として偏差の絶対値の最大値が最小になる観測値の数は３個で，その中の２個に対する偏差の符号は等しく，もう１つの観測値の符号はこれらと異なることを見出した.[3]

A. L. Cauchy は 1824 年に逐次的方法によって Chebyshev 基準による回帰直線が一意であるとき，Laplace と同じ特徴を見出し，回帰曲線の場合偏差の絶対値の最大値が最小である観測値の数はその曲線の未知の係数の数より少なくとも１つ多いことを発見した.[4] J. B. J. Fourier は 1824 年から 27 年にかけて Chebyshev 基準による回帰直線を求めるに当って現在 Fourier-Motzkin 消去法[5] と言われるリニアー・プログラミングの解法の１つを見出した.[6] C. J. de la Vallée Poussin は 1919 年に Chebyshev 基準による $n$ 次の回帰曲線の場合，偏差の絶対値の最大値は $n+2$ 個の観測値に対して最小になり，これらの偏差の符号が(独立変数の値の小さい方から)交互に変わることを証明した.[7]

Wagner [34]が最小絶対値法や Chebyshev 基準による回帰直線をリニアー・プログラミングの問題として求めることができることを示して以来，これらの回帰直線は比較的容易に求めることがで

---

1　Harter［14］, p. 149, Sheynin［29］, Sheynin［30］, p. 52.

2　Laplace の Chebyshev 基準に関する考察については Gillispie［11］, p. 188, Harter［14］, p. 152, Shyenin［31］, pp. 47-50, Stigler［32］, pp. 50-1, Todhunter［33］, Vol. II, pp. 132, 205-6 を参照のこと．

3　Harter［14］, p. 152.

4　Harter［14］, p. 158.

5　Fourier-Motzkin 消去法は Bertsimas and Tsitsiklis［２］, pp. 70-4, Chvátal［４］, pp. 241-2, Dantzig［７］, pp. 84-5, Dantzig and Thapa［８］, pp. 43-53, Murty［20］, pp. 150-3 に見られる．

6　Kohler［17］は Fourier の線形不等式による Chebyshev 基準の問題等の解法に関する 1824 年の論文の英語訳である．Fourier の Chebyshev 基準による回帰直線については Dantzig［７］, p. 21, Grattan-Guinness［12］, Harter［14］, pp. 158-9 にも言及されている．

7　Harter［14］, p. 245. Hastings［15］, pp. 3-6, 12-3 には Chebyshev 基準による回帰曲線がもつこのような特徴が説明なしに図で示されている．

きるようになった．Appa and Smith［１］はリニアー・プログラミングの双対定理を利用して最小絶対値法や Chebyshev 基準による回帰超平面がもつ幾つかの特徴を明らかにし，Farebrother［９］は Chebyshev 基準による回帰直線を幾何学的に求める方法を説明した．

尾崎［21］は Chebyshev 基準による回帰直線が一意であるための条件や回帰直線の傾きが正，負あるいはゼロであるための必要十分条件などを明らかにし，尾崎［23］はこの基準による回帰直線を求める Farebrother よりも一層効率的な幾何学的方法を提案し，尾崎［26］は尾崎［21］の主要な定理を別の方法で証明した．尾崎［22］はこの基準による原点を通る回帰直線の傾きを一般的に求め，これによりこの直線の傾きが正，負，ゼロになるための十分条件などを明らかにし，尾崎［24］はこの基準による原点を通る回帰直線の傾きが正，負，ゼロになるための必要十分条件を証明し，尾崎［27］はこの基準による原点を通る回帰直線の傾きを決定する必要十分条件を別の方法で証明した．また，尾崎［25］はこの基準による２次の回帰曲線が一意であるための条件，４個の観測値に対して偏差の絶対値の最大値が最小になり，これらに対する最大の偏差の符号が交互に変わること，２次の項の係数が正あるいは負になるための条件などを明らかにした．

本論文の目的は，$n$ 次の多項式で表される Chebyshev 基準による回帰曲線が $n+2$ 個の観測値に対して偏差の絶対値の最大値が最小になり，これら最大の偏差の符号が交互に変わるという de la Vallée Poussin の見出した特徴やこの曲線が一意になるための条件を明らかにし，証明することにある．本論文は尾崎［21］や［25］における定理の一般化である．

## ２．Chebyshev 基準による回帰曲線

独立変数 $x$ と従属変数 $y$ に関する $m$ 個の与えられた観測値を

$$(x_i,\ y_i) \qquad (i = 1, \cdots, m)$$

とし，これらの観測値に対して

(1) $$y = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_n x + a_{n+1}$$

という回帰曲線の係数 $a_j\ (j = 1, \cdots, n+1)$ を Chebyshev 基準によって求める．統計的に意味があるために観測値の数は未知の係数の数より多く，

$$m \geqq n + 2$$

であるとする．(1) と $i$ 番目の観測値との偏差 $e_i$ を

(2) $$e_i = y_i - (a_1 x_i^n + a_2 x_i^{n-1} + \cdots + a_{n+1}) \quad (i = 1, \cdots, m)$$

と定義し，Chebyshev 基準による (2) の偏差の絶対値の最大値

$$\max_{i=1,\cdots,m} |e_i|$$

を最小にすることによって (1) の係数を求める．いま，

$$z = \max_{i=1,\cdots,m} |e_i| \geqq 0$$

と定めると，$z \geqq e_i$，$z \geqq -e_i\ (i = 1, \cdots, m)$ であるから，(2) を用いて Chebyshev 基準による (1) の係数と偏差の絶対値の最大値の中の最小値は，

(3) $$z$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
a_1x_i^n + a_2x_i^{n-1} + \cdots + a_nx_i + a_{n+1} + z &\geqq \phantom{-}y_i \quad (i=1, \cdots, m)\\
-a_1x_i^n - a_2x_i^{n-1} - \cdots - a_nx_i - a_{n+1} + z &\geqq -y_i \quad (i=1, \cdots, m)\\
z &\geqq 0
\end{aligned}
$$

というリニアー・プログラミングの問題の最適解としてえられる．ここで，変数 $a_j\,(j=1, \cdots, n+1)$ には符号の制約がない．この双対問題は，

$$
(5)\qquad \sum_{i=1}^{m} y_i\,(u_i - v_i)
$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} x_i^n\,(u_i - v_i) = 0\\
&\sum_{i=1}^{m} x_i^{n-1}\,(u_i - v_i) = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_{i=1}^{m} (u_i - v_i) = 0\\
&\sum_{i=1}^{m} (u_i + v_i) \leqq 1\\
&u_i \geqq 0,\ v_i \geqq 0 \quad (i=1, \cdots, m)
\end{aligned}
$$

となる．

主問題のすべての $a_j$ の値を任意に定め，$z$ の値を十分大きくとれば，これらは制約条件 (4) のすべての式を満たし，またすべての $i$ について $u_i = v_i = 0$ とすれば，これらは制約条件 (6) のすべての式を満たす．したがって，このように主問題と双対問題の両方に実行可能解が存在するから，双対定理の１つによって主問題と双対問題各々に最適解が存在する．[8] 以下において主問題の最適解を $\tilde{a}_j\,(j=1, \cdots, n+1)$，$\tilde{z}$，双対問題の最適解を $\tilde{u}_i$，$\tilde{v}_i\,(i=1, \cdots, m)$ と表す．すべての観測値が同時に (1) の上にないとすると，

$$
(7)\qquad \tilde{z} > 0
$$

である．(7) より (6) の $n+2$ 番目の不等式は相補弛緩定理[9] によって等号で成立し，

$$
\sum_{i=1}^{m} (\tilde{u}_i + \tilde{v}_i) = 1
$$

となる．また，(7) が成立するならば，双対問題の最適解において

$$
(8)\qquad \tilde{u}_i\,\tilde{v}_i = 0 \quad (i=1, \cdots, m)
$$

が成立する．何故なら (8) が成立せず，もしある $i$ に対して同時に $\tilde{u}_i > 0$，$\tilde{v}_i > 0$ であるならば，相補弛緩定理によりこの $i$ に対して

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_1x_i^n + \tilde{a}_2x_i^{n-1} + \cdots + \tilde{a}_{n+1} + \tilde{z} &= \phantom{-}y_i\\
-\tilde{a}_1x_i^n - \tilde{a}_2x_i^{n-1} - \cdots - \tilde{a}_{n+1} + \tilde{z} &= -y_i
\end{aligned}
$$

となる．これらを加えると，$\tilde{z} = 0$ となって (7) に矛盾する．ゆえに，(8) が成立する．

8　Collatz and Wetterling［５］, p. 93, Cooper and Steinberg［６］, p. 171, Dantzig［７］, p. 129, Gass［10］, p. 162, Krekó［18］, pp. 194-5 など.

9　Bertsimas and Tsitsiklis［２］, pp. 151-2, Chvátal［４］, pp. 62-4, Collatz and Wetterling［５］, pp. 92-3, Cooper and Steinberg［６］, pp. 174-5, Dantzig［７］, pp. 134-6, Gass［10］, pp. 168-70, Hadley［13］, pp. 239-41, Krekó［18］, p. 196, Murty［20］, pp. 197-8 など.

## ３．特徴づけ定理

本節で Chebyshev 基準による高次の回帰曲線を特徴づける定理を証明する．以下において

$$w_i = u_i - v_i \quad (i = 1, \cdots, m)$$

と表し，最適解 $\tilde{u}_i$，$\tilde{v}_i$ に対する $w_i$ の値を $\tilde{w}_i$ とする．

定理１．すべての観測値に対して

(9)
$$x_i \neq x_j \quad (i, j = 1, \cdots, m\,;\, i \neq j)$$

であるならば，(4) の２つの式のいずれかが等号で成立する観測値の数は少なくとも $n+2$ 個である．

証明．最初，$m-(n+1)$ 個の $\tilde{w}_i$ がゼロであると仮定し，これらを簡単化のために

$$\tilde{w}_i = 0 \quad (i = n+2, \cdots, m)$$

とすると，制約条件 (6) の初めの $n+1$ 個の式は，並べ換えて

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n+1}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \vdots \\ \tilde{w}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

と表せる．この左辺の係数行列からできる Vandermonde 行列式 $V$ は，

(10)
$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_{n+1} - x_1) \times (x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\cdots(x_{n+1} - x_2)\cdots(x_{n+1} - x_n) = \prod_{\substack{s,\, t = 1, \cdots, n+1 \\ s < t}} (x_t - x_s)$$

であり，[10] (9) が成立するならば，$V \neq 0$ である．これより先の方程式の解は $\tilde{w}_i = 0\ (i = 1, \cdots, n+1)$ となり，これと先の仮定よりすべての $\tilde{w}_i$ がゼロとなる．双対定理の１つによって主問題の目的関数の最小値は双対問題の目的関数の最大値に等しく，[11] これより $\tilde{z} = 0$ となる．しかし，これは (7) に矛盾する．ゆえに，$m-(n+1)$ 個の $\tilde{w}_i$ がゼロになることはない．同様に，$m-(n+1)$ 個より多い $\tilde{w}_i$ がゼロになることもない．したがって，多くても $m-(n+2)$ 個の $\tilde{w}_i$ が 0 であり，少なくとも $n+2$ 個の $\tilde{w}_i$ がゼロではない．これより (8) に注意すると，$n+2$ 個以上の $\tilde{u}_i$ か $\tilde{v}_i$ が異なった $i$ に対して正である．相補弛緩定理によって $\tilde{u}_i > 0$ である $i$ に対する (4) は，

(11)
$$\tilde{a}_1 x_i^n + \tilde{a}_2 x_i^{n-1} + \cdots + \tilde{a}_{n+1} + \tilde{z} = y_i$$

となり，$\tilde{v}_i > 0$ である $i$ に対しては，

(12)
$$-\tilde{a}_1 x_i^n - \tilde{a}_2 x_i^{n-1} - \cdots - \tilde{a}_{n+1} + \tilde{z} = -y_i$$

---

10　Browne［３］, p. 34, Horn and Johnson［16］, p. 29, Lancaster and Tismenetsky［19］, p. 35, Perlis［28］, pp. 328-9, Zurmühl［35］, pp. 149-59 など．

11　Bertsimas and Tsitsiklis［２］, pp. 148-9, Chvátal［４］, pp. 58-9, 141-3, Collatz and Wetterling［５］, pp. 90-2, Cooper and Steinberg［６］, pp. 163-4, Dantzig［７］, p. 129, Gass［10］, pp. 158-61, Hadley［13］, pp. 229-30, Krekó［18］, pp. 193-4, Murty［20］, p. 192 など．

となる．これらが成立する観測値の数は少なくとも $n+2$ 個である．□

定理２．(9) が成立するならば，回帰曲線 (1) は一意に定まる．

証明．定理１より双対問題の最適解におけるゼロでない $\tilde{w}_i$ の数は $n+2$ 個以上あり，双対問題の制約条件 (6) には非負性の条件を除いて $n+2$ 個の式がある．リニアー・プログラミングの問題の最適解は基底解から成り立つから,[12] この場合最適な基底解において丁度 $n+2$ 個の $\tilde{w}_i$ がゼロでないことになり，双対問題の最適解は退化せず，主問題の最適解は一意である.[13] □

(9) が成立するとき，定理２の証明で述べたように丁度 $n+2$ 個の $\tilde{w}_i$ がゼロではないから，必要ならば，観測値の番号を付け変えることによって

(13)
$$\tilde{w}_i \neq 0 \quad (i = 1, \cdots, n+2),\ \ \tilde{w}_i = 0 \quad (i = n+3, \cdots, m)$$

とし，これらの番号に対して

(14)
$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2}$$

とすることができる．(8) と (13) に注意して

$$\tilde{w}_i = \tilde{u}_i - \tilde{v}_i = \tilde{u}_i > 0$$

である $i$ に対して相補弛緩定理により (11) が成立するから，このような観測値は (1) の上方にあり，(1) との偏差の絶対値は $\tilde{z}$ である．また，

$$\tilde{w}_i = \tilde{u}_i - \tilde{v}_i = -\tilde{v}_i < 0$$

である $i$ に対して (12) が成立し，このような観測値は (1) の下方にあり，(1) との偏差の絶対値はやはり $\tilde{z}$ である．以下において観測値の番号の集合 $\{1, 2, \cdots, n+2\}$ の中の奇数からなる部分集合を $S$，偶数からなる部分集合を $T$ とする．

定理３．Chebyshev 基準による最適な回帰曲線 (1) との偏差の絶対値が $\tilde{z}$ となり，(13) と (14) を満たす観測値に対して

(15)
$$\tilde{u}_i > 0 \quad (i \in S),\ \ \tilde{v}_i > 0 \quad (i \in T)$$

であるか，

(16)
$$\tilde{v}_i > 0 \quad (i \in S),\ \ \tilde{u}_i > 0 \quad (i \in T)$$

のいずれかが成立する．

証明．(13) を考慮して制約条件 (6) の最初の $n+1$ 個の式は，

(17)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n+1}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \vdots \\ \tilde{w}_{n+1} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+2}^n \end{bmatrix} \tilde{w}_{n+2}$$

---

12　Bertsimas and Tsitsiklis［２］, pp. 50–2, Cooper and Steinberg［６］, pp. 59–60, Dantzig［７］, pp. 94–5, Dantzig and Thapa［８］, p. 73, Gass［10］, pp. 74–5, Hadley［13］, p. 103, Murty［20］, p. 123 など.

13　Chvátal［４］, p. 65, Dantzig［７］, p. 95, Dantzig and Thapa［８］, p. 73, Krekó［18］, p. 195, Murty［20］, p. 140 など.

と表せる．(17) のすべての $\tilde{w}_i$ は (13) よりゼロではないから，(17) の左辺の係数からなる行列式は (10) の $V$ と同じであり，(14) より $V > 0$ である．(17) は Cramer のルールを用いて

$$\tilde{w}_i = -\frac{\tilde{w}_{n+2}}{V}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{i-1} & x_{n+2} & x_{i+1} & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & \cdots & x_{i-1}^n & x_{n+2}^n & x_{i+1}^n & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} \quad (i = 1, \cdots, n+1) \tag{18}$$

と表せる．(18) における行列式の第 $i$ 列をそれより大きい番号の列と順次入れ換えて最後の列に置き，これを $(-1)^{n+1-i}V_i$，すなわち

$$(-1)^{n+1-i}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{i-1} & x_{i+1} & \cdots & x_{n+1} & x_{n+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^n & \cdots & x_{i-1}^n & x_{i+1}^n & \cdots & x_{n+1}^n & x_{n+2}^n \end{vmatrix} = (-1)^{n+1-i}V_i \quad (i = 1, \cdots, n+1) \tag{19}$$

と表す．(19) の $V_i$ は (10) の $V$ と同様に，(14) より正である．(19) を用いると，(18) は

$$\tilde{w}_i = (-1)^{n+2-i}\frac{V_i}{V}\tilde{w}_{n+2} \quad (i = 1, \cdots, n+1) \tag{20}$$

と書ける．(20) において $V$ とすべての $V_i$ は正であるから，$\tilde{w}_i$ の符号を sgn $\tilde{w}_i$ と表すと，$n$ が奇数であるならば，奇数番号の $i$ に対して $\tilde{w}_i$ は $\tilde{w}_{n+2}$ と同符号，偶数番号の $i$ に対して異符号となるから，

$$\mathrm{sgn}\,\tilde{w}_i = \mathrm{sgn}\,\tilde{w}_{n+2} \quad (i \in S),\quad \mathrm{sgn}\,\tilde{w}_i = -\,\mathrm{sgn}\,\tilde{w}_{n+2} \quad (i \in T)$$

となり，また $n$ が偶数であるならば，奇数番号の $i$ に対して $\tilde{w}_i$ は $\tilde{w}_{n+2}$ と異符号，偶数番号の $i$ に対して $w_{n+2}$ と同符号になるから，

$$\mathrm{sgn}\,\tilde{w}_i = -\,\mathrm{sgn}\,\tilde{w}_{n+2} \quad (i \in S),\quad \mathrm{sgn}\,\tilde{w}_i = \mathrm{sgn}\,\tilde{w}_{n+2} \quad (i \in T)$$

となる．これらより $n$ が奇数で $\tilde{w}_{n+2} > 0$ ならば，(20) より

$$\mathrm{sgn}\,\tilde{w}_i > 0 \quad (i \in S),\quad \mathrm{sgn}\,\tilde{w}_i < 0 \quad (i \in T) \tag{21–1}$$

$\tilde{w}_{n+2} < 0$ ならば，

$$\mathrm{sgn}\,\tilde{w}_i < 0 \quad (i \in S),\quad \mathrm{sgn}\,\tilde{w}_i > 0 \quad (i \in T) \tag{21–2}$$

また，$n$ が偶数で $\tilde{w}_{n+2} > 0$ ならば，

$$\mathrm{sgn}\,\tilde{w}_i < 0 \quad (i \in S),\quad \mathrm{sgn}\,\tilde{w}_i > 0 \quad (i \in T) \tag{21–3}$$

$\tilde{w}_{n+2} < 0$ ならば，

$$\mathrm{sgn}\,\tilde{w}_i > 0 \quad (i \in S),\quad \mathrm{sgn}\,\tilde{w}_i < 0 \quad (i \in T) \tag{21–4}$$

となる．ゆえに，(21–1) と (21–4) のとき (15) が成立し，(21–2) と (21–3) のとき (16) が成立する．

□

定理3で証明したように (14) の下で最適な回帰曲線 (1) に対する $\tilde{w}_1$ から $\tilde{w}_{n+2}$ は (6) の初めの $n+1$ 個の等式を満たし，交互にその符号を変える．これらの符号に応じて最適な回帰曲線の上と下に偏差の絶対値が $\tilde{z}$ となる $n+2$ 個の観測値が存在する．(6) の $n+2$ 番目の式を等号で満たすためにはこれら $n+2$ 個の $\tilde{w}_i$ を次のように定めればよい．$n$ が奇数で $\tilde{w}_{n+2} > 0$ である場合，(21–1) より

$$\tilde{w}_1 = \tilde{u}_1 > 0,\ \ \tilde{w}_2 = -\tilde{v}_2 < 0, \cdots,\ \ \tilde{w}_{n+2} = \tilde{u}_{n+2} > 0$$

であるから，(13) に注意して

$$\sum_{i=1}^{n+2}(\tilde{u}_i + \tilde{v}_i) = \tilde{w}_1 - \tilde{w}_2 + \cdots + \tilde{w}_{n+2} = 1$$

が成立しなければならない．$V$ とすべての $V_i$ が正であること，$n$ が奇数であることに注意して (20) の $\tilde{w}_i$ を上式に代入すると，

$$\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2 + \cdots - \tilde{w}_{n+1} + \tilde{w}_{n+2} = \frac{\tilde{w}_{n+2}}{V}\left[(-1)^{n+1}V_1 + (-1)^{n+1}V_2 + \cdots + (-1)^2 V_{n+1} + V\right]$$

$$= \frac{(V + \sum_{i=1}^{n+1} V_j)}{V}\,\tilde{w}_{n+2} = 1$$

が成立しなければならないから，

$$\tilde{w}_{n+2} = \tilde{u}_{n+2} = \frac{V}{V + \sum_{j=1}^{n+1} V_j}$$

となり，これと (20) より

$$\tilde{w}_i = \tilde{u}_i = \frac{V_i}{V + \sum_{j=1}^{n+1} V_j} \quad (i = 1,\ 3, \cdots, n),\ \ -\tilde{w}_i = \tilde{v}_i = \frac{V_i}{V + \sum_{j=1}^{n+1} V_j} \quad (i = 2,\ 4, \cdots, n+1)$$

となる．他の場合も同様にして $\tilde{u}_i$，$\tilde{v}_i$ を求めることができる．

## ４．数値例

例題１．(9) を満たす６個の観測値を

$$(1, 4),\ (3, 2),\ (4, 6),\ (5, 9),\ (6, 7),\ (7, 9)$$

とし，Chebyshev 基準による２次の回帰曲線を求める．

２次の回帰曲線を

$$y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

とすると，これらの係数は，

$$z$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + z &\geqq 4, & -a_1 - a_2 - a_3 + z &\geqq -4\\
9a_1 + 3a_2 + a_3 + z &\geqq 2, & -9a_1 - 3a_2 - a_3 + z &\geqq -2\\
16a_1 + 4a_2 + a_3 + z &\geqq 6, & -16a_1 - 4a_2 - a_3 + z &\geqq -6\\
25a_1 + 5a_2 + a_3 + z &\geqq 9, & -25a_1 - 5a_2 - a_3 + z &\geqq -9\\
36a_1 + 6a_2 + a_3 + z &\geqq 7, & -36a_1 - 6a_2 - a_3 + z &\geqq -7\\
49a_1 + 7a_2 + a_3 + z &\geqq 9, & -49a_1 - 7a_2 - a_3 + z &\geqq -9
\end{aligned}$$

$$z \geqq 0$$

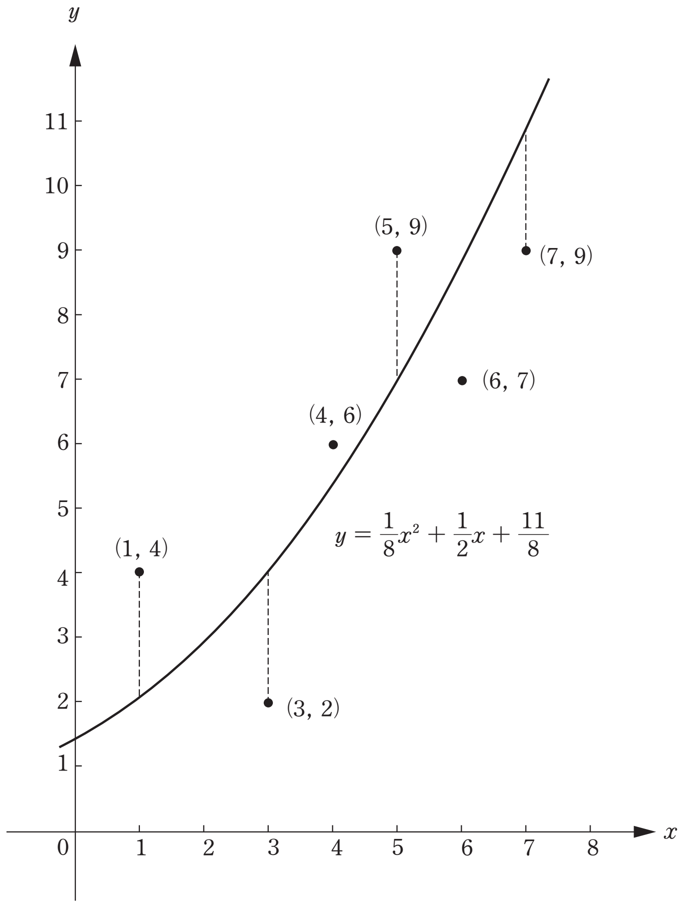
という問題を解くことによって求められる．ここで，$a_1$，$a_2$，$a_3$には符号の制約がない．

この問題の最適解は，$\tilde{a}_1 = 1/8$，$\tilde{a}_2 = 1/2$，$\tilde{a}_3 = 11/8$，$\tilde{z} = 2$ であるから，求める２次の回帰

曲線は

$$y=\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}\quad(\tilde{z}=2)$$

となる．１，２，４，６番目の観測値のところで $\tilde{z}=2$ となり，これら４つの観測値はこの回帰曲線の上と下にこの順に交互に位置する（第１図を参照）．




第１図

例題２．(9) を満たす７個の観測値を

$$(0,\ 0),\ (1,\ 2),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 3),\ (5,\ 7),\ (6,\ 9)$$

とし，Chebyshev 基準による３次の回帰曲線を求める．

３次の回帰曲線を

$$y=a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$$

とすると，これらの係数は，

$$z$$

を次の制約条件の下で最小にする

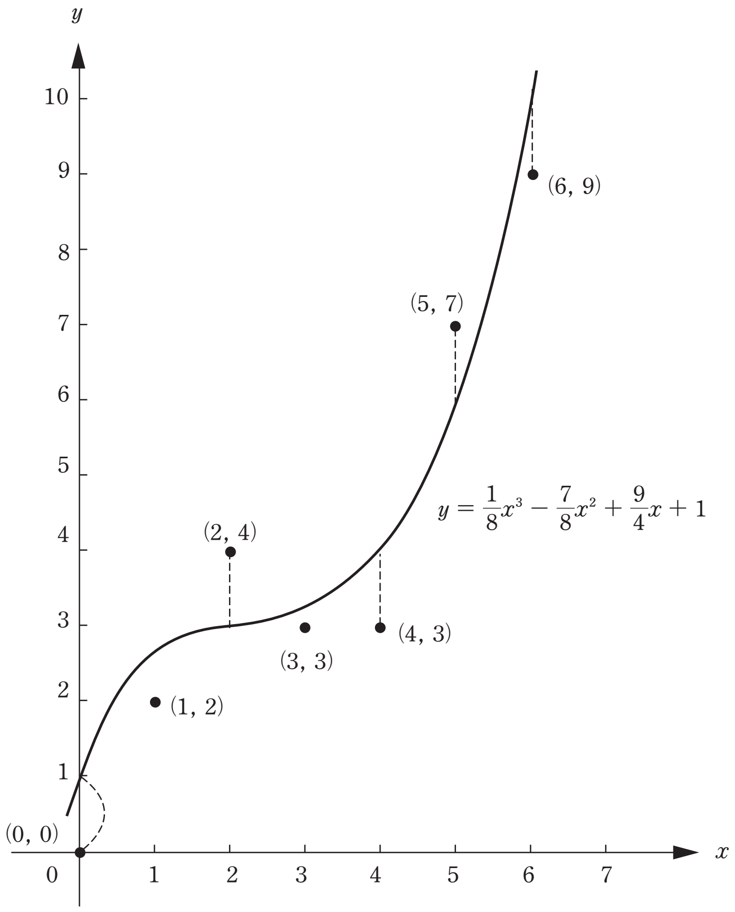
$$
\begin{aligned}
a_4+z &\geqq 0, & -a_4+z &\geqq 0\\
a_1+a_2+a_3+a_4+z &\geqq 2, & -a_1-a_2-a_3-a_4+z &\geqq -2\\
8a_1+4a_2+2a_3+a_4+z &\geqq 4, & -8a_1-4a_2-2a_3-a_4+z &\geqq -4\\
27a_1+9a_2+3a_3+a_4+z &\geqq 3, & -27a_1-9a_2-3a_3-a_4+z &\geqq -3\\
64a_1+16a_2+4a_3+a_4+z &\geqq 3, & -64a_1-16a_2-4a_3-a_4+z &\geqq -3\\
125a_1+25a_2+5a_3+a_4+z &\geqq 7, & -125a_1-25a_2-5a_3-a_4+z &\geqq -7\\
216a_1+36a_2+6a_3+a_4+z &\geqq 9, & -216a_1-36a_2-6a_3-a_4+z &\geqq -9
\end{aligned}
$$

$$z \geqq 0$$

という問題を解くことによって求めることができる．ここで，$a_1$，$a_2$，$a_3$には符号の制約がない．

この問題の最適解は，$\tilde{a}_1=1/8$，$\tilde{a}_2=-7/8$，$\tilde{a}_3=9/4$，$\tilde{a}_4=1$，$\tilde{z}=1$となるから，したがって Chebyshev 基準による３次の回帰曲線は

$$y=\frac{1}{8}x^3-\frac{7}{8}x^2+\frac{9}{4}x+1 \quad (\tilde{z}=1)$$




第２図

となる．１，３，５，６，７番目の観測値のところで $\tilde{z}=1$ となり，これら５個の観測値はこの回帰曲線の下と上にこの順に交互に位置する（第２図を参照）．

## 参考文献


［１］Appa, G., and Smith, C., "On $L_1$ and Chebyshev Estimation," *Mathematical Programming*, Vol. 5 (1973), pp. 73–87.

［２］Bertsimas, D., and Tsitsiklis, J. N., *Introduction to Linear Optimization*. Belmont, Mass. : Athena Scientific, 1997.

［３］Browne, E. T., *Introduction to the Theory of Determinants and Matrices*. Chapel Hill, N. C.: The University of North Carolina Press, 1958.

［４］Chavátal, V., *Linear Programming*. New York : W. H. Freeman, 1983.

［５］Collatz, L., and Wetteling, W., *Optimization Problems*, trans. P. Wadsack. New York : Springer-Verlag, 1975.

［６］Cooper, L., and Steinberg, D., *Methods and Applications of Linear Programming*. Philadelphia, Penn.: W. B. Saunders, 1974.

［７］Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1963.

［８］Dantzig, G. B., and Thapa, M. N., *Linear Programming*, 1 : *Introduction*. New York : Springer-Verlag, 1997.

［９］Farebrother, R. W., "The Historical Development of the $L_1$ and $L_\infty$ Estimation Procedures," in Dodge, Y. (ed.), *Statistical Data Analysis Based on the $L_1$-Norm and Related Methods*. Amsterdam : North-Holland, 1987, pp. 37–63.

［10］Gass, S. I., *Linear Programming : Methods and Applications*. Fifth Ed., New York : McGraw-Hill Book Co., 1985.

［11］Gillispie, C. C., *Pierre-Simon Laplace, 1749-1827 : A Life in Exact Science*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1997.

［12］Grattan-Guinness, I., "Joseph Fourier's Anticipation of Linear Programming," *Operational Research Quarterly*, Vol. 21 (1970), pp. 361–4.

［13］Hadley, G., *Linear Programming*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1962.

［14］Harter, H. L., "The Method of Least Squares and Some Alternatives," *International Statistical Review*, Vol. 42 (1974), pp. 147–74 (Part I), pp. 235–64 (Part II).

［15］Hastings, C., Jr., *Approximations for Digital Computers*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1955.

［16］Horn, R. A., and Johnson, C. R., *Matrix Analysis*. Cambridge : Cambridge University Press, 1985.

［17］Kohler, D. A., "Translation of a Report by Fourier on His Work on Linear Inequalities," *Opsearch*, Vol. 10 (1973), pp. 38–42.

［18］Krekó, B., *Linear Programming*, trans. J. H. L. Ahrens and C. M. Safe. London : Sir Isaac Pitman & Sons, 1968.

［19］Lancaster, P., and Tismenetsky, M., *The Theory of Matrices*. Second Ed., Orlando, Fla.: Academic Press, 1985.

［20］Murty, K. G., *Linear Programming*. New York : John Wiley & Sons, 1983.

［21］尾崎雄一郎,「Chebyshev 基準による回帰直線の特徴づけ定理」,『名城論叢』, Vol. 2, No. 4 (2002 年), pp. 21–33.

［22］尾崎雄一郎,「Chebyshev 基準による原点を通る回帰直線とリニアー・プログラミング」,『名城論叢』, Vol. 3, No. 1 (2002 年), pp. 1–10.

［23］尾崎雄一郎,「Chebyshev 基準による回帰直線の幾何学的導出方法」,『名城論叢』, Vol. 3, No. 3 (2002 年), pp. 1–8.

［24］尾崎雄一郎,「Chebyshev 基準による原点を通る回帰直線の特徴づけ定理」,『名城論叢』, Vol. 3, No. 4 (2003 年), pp. 59–71.

［25］尾崎雄一郎,「Chebyshev 基準による２次の回帰曲線の特徴づけ定理」,『名城論叢』, Vol. 4, No. 2（2003 年）, pp. 1-19.

［26］尾崎雄一郎,「Chebyshev 基準による回帰直線の特徴づけ定理の別の証明」,『名城論叢』, Vol. 5, No. 1（2004 年）, pp. 19-33.

［27］尾崎雄一郎,「Chebyshev 基準による原点を通る回帰直線の特徴づけ定理の別の証明」,『名城論叢』, Vol. 5, No. 4（2005 年）, pp. 129-44.

［28］Perlis, S., *Introduction to Algebra.* Waltham, Mass.: Blaisdell Publishing Co., 1966.

［29］Sheynin, O. B., “Origin of the Theory of Errors,” *Nature*, Vol. 211 (August 27, 1966), pp. 1003-4.

［30］Sheynin, O. B., “On the Mathematical Treatment of Observations by L. Euler,” *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 9 (1972), pp. 45-56.

［31］Sheynin, O. B., “Laplace’s Theory of Errors,” *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 17 (1977), pp. 1-61.

［32］Stigler, S. M., *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900.* Cambridge, Mass.: The Belknap Press of Harvard University Press, 1986.

［33］Todhunter, I., *A History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth.* Cambridge: Macmillan, 1873; New York: Dover Publications, 1962.

［34］Wagner, H. M., “Linear Programming Techniques for Regression Analysis,” *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 54 (1959), pp. 206-12.

［35］Zurmühl, R., *Matrizen und ihre technischen Anwendungen.* Vierte neubearbeitete Auflage, Berlin: Springer-Verlag, 1964.