Leslie 行列に基づいた期末収穫問題と期首収穫問題の関連

尾　崎　雄一郎　　永　田　達　哉

１．はじめに

ある動物を年令によって幾つかのクラスに分け, 各クラスの出産率と生存率は年令にのみ依存し, 期間を経ても不変であると仮定し，これらを要素にもつ行列を用いて動物の年令構成の変動や固有値問題などを Lewis［11］が，続いて Leslie［９］,［10］が考察した．Lefkovitch［８］, Beddington and Taylor［２］, Anton and Rorres［１］などは Leslie 行列を用いて各クラスの個体数を毎期一定に維持しつつ，幾つかのクラスから動物を収穫する問題をやはり行列の固有値問題の観点から考察した．

Doubleday［５］は，Leslie 行列より一般的な非負行列を用いて各クラスの個体数を毎期一定に維持しつつ，期末に収穫する問題と期首に収穫する問題を初めてリニアー・プログラミングの問題として定式化した．彼はこの一般的な非負行列の下で期末の収穫からえられる総収入が期首の収穫からえられる総収入より大きいか, 等しいことを，またすべてのクラスの個体の価格が等しいならば, 期末収穫問題と期首収穫問題の収穫するクラスは同じになることを証明した．さらに，一般的な非負行列の固有値が１に等しく，最も上のクラスの個体が出産する場合には，各クラスの個体数を毎期一定に保つことができるだけで，どのクラスからも収穫できないことを明らかにした．

尾崎［12］,［13］は，リニアー・プログラミングによる期末収穫問題と期首収穫問題の最適解を Leslie 行列に各々異なった条件を付加して求め，最適解の幾つかの特徴を明らかにした．尾崎［14］は Leslie 行列に基づいたリニアー・プログラミングによる期末収穫問題の総収入が期首収穫問題の総収入より大きいか，等しいことを一般的に証明し，期末収穫問題の総収入が期首収穫問題の総収入より大きくなるための必要十分条件と, これらが等しくなるための必要十分条件を明らかにした．

本論文において Leslie 行列に基づいたリニアー・プログラミングによる期末収穫問題を期首収穫問題に変換する方法と逆に期首収穫問題を期末収穫問題に変換する方法を示し，これらにより期末収穫問題の総収入が期首収穫問題の総収入より大きいか，等しいこと，２つの問題の収穫するクラスが同じである場合には各々の問題の最適解，各々の総収入の間にある一定の関係があること，またすべてのクラスの個体の価格が等しい場合や Leslie 行列がある条件を満たす場合にはやはり２つの問題各々の最適解や総収入各々の間に一定の関係があることなどを明らかにする．

２．Leslie 行列

ある動物の雌を年令の最も若い１番目から順に最も年をとった n 番目まで等しい年令間隔で n 個のクラスに分け，この年令間隔に等しい時間間隔を考察期間とする．１期間経過する間に i 番目のクラスの雌１個体が出産する１番目のクラス雌の子供の平均的な数を一定の a_i とし，

(1)　$a_i \geqq 0 \quad (i = 1, \cdots, n)$

で，少なくとも1つの a_i は正であるとする．また，i 番目のクラスの雌が $i+1$ 番目のクラスまで生存できる平均的生存率を一定の b_i とし，

(2)　$0 < b_i \leqq 1 \quad (i = 1, \cdots, n-1), \quad b_n = 0$

であるとする．ここで，n 番目より上のクラスを設けていないので，n 番目のクラスの個体は1期間経過後すべて死亡してしまい，$b_n = 0$ であるとする．これらをまとめた

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

を Leslie 行列と呼ぶ.

３．期末収穫問題

期首における i 番目のクラスの個体数を x_i，群全体の数を一定の $c\,(>0)$，期末に i 番目のクラスから収穫する個体数を h_i，そのクラスの1個体の価格を一定の $p_i\,(\geqq 0)$，目的関数の値を f とする．期首における各クラスの個体数の合計が所与の c に等しくなるためには，

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$$

でなければならない．1期間経過する間にすべてのクラスから生まれてくる1番目のクラスの個体総数から期末に収穫し，収穫後に残った個体数が期首に存在していたこのクラスの個体数と等しくなって毎期期首における1番目のクラスの個体数を一定に維持するためには，

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - h_1 = x_1$$

という式が成立しなければならない．２番目以降のクラスについては1期間経過すると $i-1$ 番目のクラスの個体数のうちこのクラスの生存率に該当する数だけ生存して i 番目のクラスへ移行するから，期末に i 番目のクラスから収穫した後に残った個体数が期首に存在していた i 番目のクラスの個体数と等しくなって毎期期首における i 番目のクラスの個体数を一定に維持するためには，

$$b_{i-1}x_{i-1} - h_i = x_i \quad (i = 2, \cdots, n)$$

という式が成立し，これらの式における変数 x_i と h_i はすべて非負でなければならない.

期末にすべてのクラスから収穫した個体を各々一定の価格で販売することからえられる総収入が最大にすべき目的関数である.

期首における群全体の数と各クラスの個体数を毎期一定に保ちつつ，期末の収穫からえられる総収入を最大にするリニアー・プログラミングの問題は，以上より

(3)　$f = p_1h_1 + p_2h_2 + \cdots + p_nh_n$

を次の制約条件の下で最大にする

$$
(4)\quad
\begin{array}{l}
x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = c \\
(1-a_1)x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_{n-1}x_{n-1} - a_nx_n + h_1 = 0 \\
-b_1x_1 + x_2 + h_2 = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-b_{n-1}x_{n-1} + x_n + h_n = 0 \\
x_i \geqq 0,\ h_i \geqq 0 \quad (i=1, \cdots, n)
\end{array}
$$

と表せる．

定理１．期末収穫問題 (3)－(4) に最適解が存在するための必要十分条件は，

$$
(5)\qquad a_1 + a_2b_1 + \cdots + a_nb_1b_2\cdots b_{n-1} \geqq 1
$$

が成立することである．

証明．（必要性）期末収穫問題 (3)－(4) に最適解が存在すると仮定する．(4) の３番目以下の式

$$h_i = b_{i-1}x_{i-1} - x_i \geqq 0 \quad (i=2, \cdots, n)$$

より

$$
(6)\qquad b_1x_1 \geqq x_2,\ b_2x_2 \geqq x_3,\ \cdots,\ b_{n-1}x_{n-1} \geqq x_n
$$

をえる．(2) と (6) より

$$x_1 \geqq b_1x_1 \geqq x_2,\ x_2 \geqq b_2x_2 \geqq x_3,\ \cdots,\ x_{n-1} \geqq b_{n-1}x_{n-1} \geqq x_n$$

が成立するから，これらと $x_n \geqq 0$ より

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n \geqq 0$$

をえる．ここで，もし $x_1 = 0$ ならば，すべての x_i がゼロになる．しかし，$c > 0$ であるから，これは (4) の最初の式に矛盾する．ゆえに，$x_1 > 0$ でなければならない．他方，(6) を順次用いると，

$$b_1x_1 \geqq x_2,\ b_1b_2x_1 \geqq x_3,\cdots,\ b_1b_2\cdots b_{n-1}x_1 \geqq x_n$$

をえる．これらの不等式，(1)，(4) の２番目の式と $h_1 \geqq 0$ より

$$0 \leqq h_1 = (a_1-1)x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leqq (a_1 - 1 + a_2b_1 + \cdots + a_nb_1b_2\cdots b_{n-1})x_1$$

となり，$x_1 > 0$ に注意すると，これより (5) をえる．

（十分性）(5) が成立すると仮定する．いま，$b_0 = 1$ とし，

$$x_i = \frac{b_1b_2\cdots b_{i-1}c}{1 + b_1 + \cdots + b_1b_2\cdots b_{n-1}} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

と定めると，これらの x_i はすべて正であり，(4) の最初の式を満たす．(4) の２番目の式にこれらの x_i を代入すると，

$$0 \leqq h_1 = (a_1 - 1)x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \frac{(a_1 + a_2b_1 + \cdots + a_nb_1b_2\cdots b_{n-1} - 1)c}{1 + b_1 + \cdots + b_1b_2\cdots b_{n-1}}$$

となるから，(5) が成立するならば，$h_1 \geqq 0$ となり，(4) の２番目の式が満たされる．さらに，これらの x_i より

$$h_i = b_{i-1}x_{i-1} - x_i = 0 \quad (i=2, \cdots, n)$$

が成立するから，(4) の３番目以下の等式がすべて満たされ，これらの h_i の非負性の条件も満たされる．以上より (5) が成立するならば，(4) のすべての式を満たす実行可能解が存在する．(4) の最初の式よりすべての変数は上に有界であるから，すべての実行可能解に対して目的関数 (3) の値は

上に有界である．したがって，双対定理の１つ（Collatz and Wetterling［３］, p. 114, Dantzig［４］, pp. 134–135, Goldman and Tucker［６］, p. 60, Kolman and Beck［７］, pp. 174–175 など）によって期末収穫問題(3)−(4)に最適解が存在する．□

４．期首収穫問題

期首における i 番目のクラスの収穫直前の個体数を x'_i，期首に収穫する個体数を h'_i，期首の収穫直後に残っている個体数を z_i，目的関数の値を f' とし，その他の記号は期末収穫問題と同じであるとする．

期首における各クラスの個体数の合計が定められた群全体の数に等しくなるためには，

$$x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n = c$$

でなければならない．期首の収穫直後に残った各クラスの個体から１期間経過する間に生まれてくる１番目のクラスの個体総数が期首の収穫直前に存在していたそのクラスの個体数と等しくなって毎期期首における１番目のクラスの個体数を一定に保つためには，

$$a_1(x'_1 - h'_1) + a_2(x'_2 - h'_2) + \cdots + a_n(x'_n - h'_n) = x'_1$$

という式が成立しなければならない．期首の収穫後に残った $i-1$ 番目のクラスの個体は１期間経過後このクラスの生存率に該当する数だけ生き残って i 番目のクラスの個体となるから，これらが期首の収穫直前の i 番目のクラスの個体数と等しくなって i 番目のクラスの収穫直前の個体数を毎期一定に保つためには，

$$b_{i-1}(x'_{i-1} - h'_{i-1}) = x'_i \quad (i = 2, \cdots, n)$$

という式が成立しなければならない．また，各クラスの期首における収穫は収穫直前に存在しているそのクラスの個体数以下，すなわち

$$x'_i \geqq h'_i \geqq 0 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

でなければならない．

最大にすべき目的関数は期首に各クラスから収穫した個体を各々一定の価格で販売することからえられる総収入である．

期首における群全体の数と各クラスの個体数を毎期一定に維持しながら，期首の収穫からえられる総収入を最大にするリニアー・プログラミングの問題は，以上より

$$f' = p_1h'_1 + p_2h'_2 + \cdots + p_nh'_n \tag{7}$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$\begin{array}{ll} x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n & = c \\ a_1(x'_1 - h'_1) + a_2(x'_2 - h'_2) + \cdots + a_n(x'_n - h'_n) & = x'_1 \\ b_1(x'_1 - h'_1) & = x'_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ b_{n-1}(x'_{n-1} - h'_{n-1}) & = x'_n \\ x'_i \geqq h'_i \geqq 0 \quad (i = 1, \cdots, n) & \end{array} \tag{8}$$

と表せる．

期首収穫問題の制約条件 (8) を以下のようにして簡単な形に書き変える．期首に i 番目のクラスの個体から収穫した後に残った個体数は，(8) の最後の不等式に注意して

$$z_i = x'_i - h'_i \geqq 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{9}$$

と表せる．(8) と (9) より

$$x'_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i z_i, \quad x'_i = b_{i-1} z_{i-1} \quad (i = 2, \cdots, n) \tag{10}$$

と表せ，(9) と (10) より

$$\begin{aligned} h'_1 &= x'_1 - z_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i z_i - z_1 \geqq 0 \\ h'_i &= x'_i - z_i = b_{i-1} z_{i-1} - z_i \geqq 0 \quad (i = 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{11}$$

と表せる．(9)，(10)，(11) を用いると，期首収穫問題 (8)−(9) は，

$$f' = p_1 h'_1 + p_2 h'_2 + \cdots + p_n h'_n \tag{12}$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$\begin{array}{l} (a_1 + b_1)z_1 + (a_2 + b_2)z_2 + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1})z_{n-1} + a_n z_n = c \\ (1 - a_1)z_1 - a_2 z_2 - \cdots\cdots - a_{n-1} z_{n-1} - a_n z_n + h'_1 = 0 \\ - b_1 z_1 + z_2 + h'_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ - b_{n-1} z_{n-1} + z_n + h'_n = 0 \\ z_i \geqq 0,\ h'_i \geqq 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \end{array} \tag{13}$$

と表せる．以下において期首収穫問題 (7)−(8) の代りに一層簡単な (12)−(13) を用いる．

定理２．期首収穫問題 (12)−(13) に最適解が存在するための必要十分条件は(5) が成立することである．

証明．（必要性）期首収穫問題 (12)−(13) に最適解が存在すると仮定する．期首収穫問題の制約条件 (13) は期末収穫問題の制約条件 (4) と１番目の式が異なるだけで，他の式はすべて形式的に同じであることより，定理１の証明におけるように，

$$z_1 \geqq z_2 \geqq \cdots \geqq z_n \geqq 0$$

が成立する．これらの不等式と (13) の最初の式より $z_1 > 0$ でなければならない．期末収穫問題の場合と同様に

$$b_1 z_1 \geqq z_2,\ b_1 b_2 z_1 \geqq z_2, \cdots,\ b_1 b_2 \cdots b_{n-1} z_1 \geqq z_n$$

が成立するから，これらの不等式，(1)，(13) の２番目の式，$h'_1 \geqq 0$ より

$$0 \leqq h'_1 = (a_1 - 1)z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_n z_n \leqq (a_1 + a_2 b_1 + \cdots + a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1} - 1) z_1$$

となり，$z_1 > 0$ を考慮すると，これより (5) をえる．

（十分性）(5) が成立すると仮定する．ここで，

$$\begin{aligned} A_n &= a_1 + a_2 b_1 + \cdots + a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1} - 1 \\ B_n &= 1 + b_1 + \cdots + b_1 b_2 \cdots b_{n-1} \\ b_0 &= 1 \end{aligned}$$

とし，

(14)
$$z_i=\frac{b_1b_2\cdots b_{i-1}c}{A_n+B_n}\quad (i=1,\cdots,n)$$
と定める．(1), (2), (5) より $A_n+B_n>0$ であるから，(14) の z_i はすべて正である．(14) より
$$(a_1+b_1)z_1+(a_2+b_2)z_2+\cdots+a_nz_n=\frac{(A_n+B_n)c}{A_n+B_n}=c$$
となるから，(14) は制約条件 (13) の最初の式を満たす．また，これらの z_i に対して
$$h_i'=b_{i-1}z_{i-1}-z_i=0\quad (i=2,\cdots,n)$$
となるから，(14) は (13) の３番目以下の等式も満たす．以上より，(5) が成立するとき，(14) の z_i が (13) の２番目の等式を満たすことと $h_1'\geqq 0$ であることが言えれば，(14) は期首収穫問題の実行可能解である．そのために (13) の２番目の式に (14) を代入すると，
$$h_1'=(a_1-1)z_1+a_2z_2+\cdots+a_nz_n=\frac{(a_1+a_2b_1+\cdots+a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}-1)c}{A_n+B_n}$$
となる．よって，(5) が成立するならば，$h_1'\geqq 0$ となり，(13) の２番目の式も満たされる．したがって，(14) で表される z_i とこれらによって定まる h_i' は (13) の実行可能解である．(13) の最初の式よりすべての変数は上に有界であるから，定理１の場合と同様期首収穫問題の目的関数の値は，すべての実行可能解に対して上に有界である．したがって，(5) が成立するならば，期首収穫問題 (12)−(13) に最適解が存在する．□

以下において期末収穫問題 (3)−(4) と期首収穫問題 (12)−(13) に最適解が存在するための必要十分条件 (5) が成立するものとする．

５．期末収穫問題の期首収穫問題への変換

期末収穫問題 (3)−(4) の最適解を x_i^*，h_i^*，その目的関数の最大値を f^*，期首収穫問題 (12)−(13) の最適解を $\hat{z}_i,\hat{h}_i'$，その目的関数の最大値を $\hat{f}'$ とする．期末収穫問題の制約条件 (4) はその最適解に対して

(15)
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}x_i^* \qquad\qquad &=c\\
x_1^*-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^*+h_1^* \qquad &=0\\
-b_{i-1}x_{i-1}^*+x_i^* \qquad +h_i^*&=0 \qquad (i=2,\cdots,n)\\
x_i^*\geqq 0,\ h_i^*&\geqq 0 \qquad (i=1,\cdots,n)
\end{aligned}$$
と表せる．(15) の２番目と３番目の式すべてを加えて，整理すると，
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)x_i^*=\sum_{i=1}^{n}x_i^*+\sum_{i=1}^{n}h_i^*$$
となる．ここで，(2) より $b_n=0$ である．この式に (15) の最初の式を代入すると，
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)x_i^*=c+\sum_{i=1}^{n}h_i^*$$
となり，この式の両辺に $c/(c+\sum h_i^*)$ を掛けると，

(16) $$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\eta x_i^*=c$$

をえる．ここで，

(17) $$\eta=\frac{c}{c+\sum_{i=1}^{n}h_i^*}$$

であり，$\sum h_i^* \geqq 0$ であるから，

(18) $$0<\eta\leqq 1$$

である．期末収穫問題の最適解が多重解であるときには，η は一般に一意ではない．最適解に対する目的関数 (3)，(16)，また (15) の2番目以下の式より

$$\eta f^*=\sum_{i=1}^{n}p_i\eta h_i^*$$

(19) $$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\eta x_i^*=c\\&\eta x_1^*-\sum_{i=1}^{n}a_i\eta x_i^*+\eta h_1^*=0\\&-b_{i-1}\eta x_{i-1}^*+\eta x_i^*+\eta h_i^*=0 \qquad (i=2,\ \cdots,\ n)\\&\eta x_i^*\geqq 0,\ \eta h_i^*\geqq 0 \qquad (i=1,\cdots,\ n)\end{aligned}$$

と表せる．これらの ηx_i^*, ηh_i^* は (13) を満たすので，期首収穫問題の実行可能解である．したがって，期首収穫問題の目的関数 (12) の最大値 $\hat{f}'$ は (19) の ηf^* 以上，すなわち

(20) $$\hat{f}'\geqq \eta f^*$$

が成立する．(20) において等号が成立するならば，ηx_i^*，ηh_i^* は期首収穫問題の最適解である．

6．期首収穫問題の期末収穫問題への変換

期首収穫問題の制約条件 (13) はその最適解に対して

(21) $$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\hat{z}_i=c\\&\hat{z}_1-\sum_{i=1}^{n}a_i\hat{z}_i+\hat{h}_1'=0\\&-b_{i-1}\hat{z}_{i-1}+\hat{z}_i+\hat{h}_i'=0 \qquad (i=2,\cdots,\ n)\\&\hat{z}_i\geqq 0,\ \hat{h}_i'\geqq 0 \qquad (i=1,\cdots,\ n)\end{aligned}$$

と表せる．(21) の2番目と3番目の式全部を加えて，整理すると，

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{z}_i=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\hat{z}_i-\sum_{i=1}^{n}\hat{h}_i'$$

となり，この式に (21) の最初の式を代入すると，

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{z}_i=c-\sum_{i=1}^{n}\hat{h}_i'$$

となる．(21) の最初の式が成立するためには，$\sum\hat{z}_i>0$ でなければならないから，上式より $c>\sum\hat{h}_i'$ である．このことに注意して上式の両辺に正の $c/(c-\sum\hat{h}_i')$ を掛けると，

(22) $$\sum_{i=1}^{n} \sigma \hat{z}_i = c$$

をえる．ここで，

(23) $$\sigma = \frac{c}{c - \sum_{i=1}^{n} \hat{h}'_i}$$

であり，$c > \sum \hat{h}'_i \geqq 0$ であるから，

(24) $$\sigma \geqq 1$$

である．期首収穫問題の最適解が多重解である場合には，σ は一般に一意ではない．最適解に対する目的関数 (12)，(22)，また (21) の２番目以下の式より

(25) $$\begin{aligned} \sigma \hat{f}' &= \sum_{i=1}^{n} p_i \sigma \hat{h}'_i \\ \sum_{i=1}^{n} \sigma \hat{z}_i &= c \\ \sigma \hat{z}_1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \sigma \hat{z}_i + \sigma \hat{h}'_1 &= 0 \\ - b_{i-1} \sigma \hat{z}_{i-1} + \sigma \hat{z}_i + \sigma \hat{h}'_i &= 0 \qquad (i = 2, \cdots, n) \\ \sigma \hat{z}_i \geqq 0,\ \sigma \hat{h}'_i &\geqq 0 \qquad (i = 1, \cdots, n) \end{aligned}$$

をえる．(25) と期末収穫問題 (3)－(4) を比べると，(25) の $\sigma \hat{z}_i$，$\sigma \hat{h}'_i$ は期末収穫問題の実行可能解であることがわかる．したがって，期末収穫問題の目的関数の最大値 f^* は (25) の $\sigma \hat{f}'$ 以上，すなわち

(26) $$f^* \geqq \sigma \hat{f}'$$

が成立する．(26) において等号が成立するならば，$\sigma \hat{x}'_i$，$\sigma \hat{h}'_i$ は期末収穫問題の最適解である．

７．期末収穫問題と期首収穫問題の最適解の関連

期末収穫問題 (3)－(4) と期首収穫問題 (12)－(13) の最適解の関連を明らかにする定理を本節で証明する．

定理３． 期末収穫問題の目的関数の最大値 f^* と期首収穫問題の目的関数の最大値 $\hat{f}'$ との間に

(27) $$f^* \geqq \hat{f}' \geqq 0$$

という関係がある．

証明． すべての p_i，h^*_i，$\hat{h}'_i$ が非負であるから，$\hat{f}' \geqq 0$ であり，(24) と (26) より (27) をえる．　□

定理４． すべての p_i が正であるとき，

(28) $$0 < \sigma\eta \leqq 1$$

である．

証明．(18) より $\eta > 0$，(24) より $\sigma \geqq 1$ であるから，$\sigma\eta > 0$ である．(20) と (26) より

(29) $$f^* \geqq \sigma\hat{f}' \geqq \sigma\eta f^*$$

をえる．$f^* > 0$ である場合には，(29) より直ちに (28) をえる．また，$f^* = 0$ である場合には，すべての p_i が正であることより $\sum h_i^* = 0$ でなければならない．これと (17) の定義より $\eta = 1$ となる．このとき，(12) と定理 3 の (27) より

$$\hat{f}' = \sum_{i=1}^{n} p_i \hat{h}_i' = 0$$

となり，すべての p_i が正であることから，$\sum \hat{h}_i' = 0$ である．これと (23) の定義より $\sigma = 1$ をえる．したがって，$\sigma\eta = 1$ となってやはり (28) が成立する．□

定理５．すべての p_i が正であるとき，次の５つの不等式

(30) $$f^* > \hat{f}'$$

(31) $$f^* > 0$$

(32) $$\eta < 1$$

(33) $$\hat{f}' > 0$$

(34) $$\sigma > 1$$

はすべて同値である．

証明．(30)⇒(31)．(30) が成立すると仮定する．(30) と定理 3 の (27) より $f^* > 0$ であり，(31) がえられる．

(31)⇔(32)．(31) が成立するならば，すべての価格が正であることより $\sum h_i^* > 0$ であり，(17) の η の定義より (32) が成立する．この逆も同様にして導びける．

(31)⇒(33)．(31) が成立なるならば，(18) と (20) より (33) がえられる．

(33)⇔(34)．(33) が成立するならば，すべての価格が正であることから，$\sum \hat{h}_i' > 0$ であり，(23) の σ の定義より (34) が成立する．すべての価格が正であることよりこの逆も成立する．

(34)⇒(30)．(34) が成立するならば，いま証明したように (33) が成立するから，(33) と (34) を用いると，(26) より $f^* \geqq \sigma\hat{f}' > \hat{f}'$ となって (30) が導びける．□

定理６．すべての p_i が正であるとき，次の５つの式

(35) $$f^* = \hat{f}'$$

(36) $$f^* = 0$$

(37) $$\eta = 1$$

(38) $$\hat{f}' = 0$$

(39) $$\sigma = 1$$

はすべて同値である．

証明．(18)，(24)，(27) を考慮し，定理 5 を適用すれば，直ちに結論をえる．□

定理７．すべての p_i が正であるとき，次の３つの式

(40) $$\hat{f}' = \eta f^*$$

(41) $$f^* = \sigma\hat{f}'$$

(42) $$\sigma\eta = 1$$

はすべて同値である．

証明．(40)⇒(41)．(40) が成立するとき，(41) が成立しないと仮定すると，(26) より $f^* > \sigma\hat{f}'$ となる．これと (40)，定理４の (28) より

$$f^* > \sigma\hat{f}' = \sigma\eta f^* \geqq f^*$$

という矛盾した結果をえる．したがって，(40) が成立するならば，(41) が成立しなければならない．
(41)⇒(40)．(41) が成立するとき，(40) が成立しないと仮定すると，(20) より $\hat{f}' > \eta f^*$ となるから，これと (28)，(41) より

$$f^* = \sigma\hat{f}' > \sigma\eta f^* \geqq f^*$$

という矛盾した結果をえる．ゆえに，(41) が成立するならば，(40) も成立する．
(40)⇒(42)．(40) が成立すると仮定すると，いま証明したように (41) が成立するから，(40) と (41) より

$$\sigma\eta f^* = \sigma\hat{f}' = f^*$$

が成立する．ここで，$f^* > 0$ であるときには，直ちに (42) がえられる．また，$f^* = 0$ であるときには，定理６より (37) と (39) が成立し，したがって (42) が成立する．
(42)⇒(40)．(42) が成立すると仮定する．(20)，(26)，(42) より

$$\eta f^* \geqq \sigma\eta\hat{f}' = \hat{f}' \geqq \eta f^*$$

をえる．明らかにこれらの式はすべて等号で成立しなければならないから，(40) をえる．□

定理８．すべての p_i が正であるとき，次の３つの不等式

$$\hat{f}' > \eta f^*,\ f^* > \sigma\hat{f}',\ \sigma\eta < 1$$

はすべて同値である．

証明．(20)，(26)，(28) を考慮すると，定理７より直ちに結論をえる．□

定理９．(40)，(41)，(42) のいずれかが成立するならば，期末収穫問題 (3)－(4) の最適解と期首収穫問題 (12)－(13) の最適解，これらの問題の目的関数の最大値の間に，

(43) $$\hat{z}_i = \eta x_i^*,\ \hat{h}_i' = \eta h_i^* \quad (i = 1, \cdots, n),\quad \hat{f}' = \eta f^*$$

という関係がある．

証明．期末収穫問題 (3)－(4) の最適解 x_i^*，h_i^* から導びいた ηx_i^*，ηh_i^* は (19) より期首収穫問題 (12)－(13) の実行可能解であり，この変換した問題の実行可能解に対する目的関数の値 ηf^* は，(40) が成立するならば，期首収穫問題の目的関数の最大値 $\hat{f}'$ に等しいので，ηx_i^*，ηh_i^* は期首収穫問題の最適解であり，(43) が成り立つ．

定理７より(40)，(41)，(42)は同値であるので，(41)や(42)が成立する場合にも(43)が成立する．
□

定理 10.　すべての p_i が正であるとき，

(44) $$\sigma\eta = 1$$

であるならば，

(45) $$\sum_{i=1}^{n} h_i^* > \sum_{i=1}^{n} \hat{h}_i' > 0,\ \sum_{i=1}^{n} h_i^* = \sum_{i=1}^{n} \hat{h}_i' = 0$$

のいずれかが成立し，

(46) $$\sigma\eta < 1$$

であるならば，(45)の最初の関係式が成立する．

証明.　(44)が成立するならば，(17)と(23)より

$$\sigma\eta = \frac{c}{(c - \sum_{i=1}^{n} \hat{h}_i')} \cdot \frac{c}{(c + \sum_{i=1}^{n} h_i^*)} = 1$$

であるから，

$$(\sum_{i=1}^{n} h_i^* - \sum_{i=1}^{n} \hat{h}_i')c = (\sum_{i=1}^{n} h_i^*)(\sum_{i=1}^{n} \hat{h}_i') \geqq 0$$

となり，これより(45)が導びける．(46)が成立するならば，同様にして

$$(\sum_{i=1}^{n} h_i^* - \sum_{i=1}^{n} \hat{h}_i')c > (\sum_{i=1}^{n} h_i^*)(\sum_{i=1}^{n} \hat{h}_i') \geqq 0$$

となる．ここで，もし $\sum \hat{h}_i' = 0$ であるならば，(12)より $\hat{f}' = 0$ となり，定理６より $f^* = 0$ となるが，すべての p_i が正であることより，これは $\sum h_i^* = 0$ を意味し，上式に矛盾する．ゆえに，$\sum \hat{h}_i' > 0$ であり，上式から(45)の最初の関係式をえる．　□

期末収穫問題と期首収穫問題の最適解に関して

$$Q = \{i | h_i^* > 0\},\quad R = \{i | \hat{h}_i' > 0\}$$
$$S = \{i | x_i^* > 0\},\quad T = \{i | \hat{z}_i > 0\}$$

と定義する．

定理 11.

(47) $$Q = R$$

であるならば，

(48) $$S = T$$

である．

証明.　期末収穫問題(3)−(4)の最適解に対して定理１の証明で示したように

(49) $$x_1^* \geqq x_2^* \geqq \cdots \geqq x_n^* \geqq 0$$

が成立し，すべての x_i^* がゼロになることはない．同様に期首収穫問題(12)−(13)の最適解に対して

(50) $$\hat{z}_1 \geqq \hat{z}_2 \geqq \cdots \geqq \hat{z}_n \geqq 0$$

が成立し，やはりすべての $\hat{z}_i$ がゼロになることはない．(47) が成立すると仮定する．このとき，(48) が成立しないならば，(49) と (50) を考慮してある s と t $(s \neq t)$ に対して

(51) $$x_i^* > 0 \quad (i = 1, \cdots, s),\ x_i^* = 0 \quad (i = s + 1, \cdots, n)$$
$$\hat{z}_i > 0 \quad (i = 1, \cdots, t),\ \hat{z}_i = 0 \quad (i = t + 1, \cdots, n)$$

となる．いま，$s > t$ と仮定すると，(51) と制約条件 (4) より

$$h_{s+1}^* = b_s x_s^* - x_{s+1}^* = b_s x_s^* > 0$$

となり，(51) と制約条件 (13) より

$$\hat{h}'_{s+1} = b_s \hat{z}_s - \hat{z}_{s+1} = 0$$

となる．これは (47) に矛盾する．同様に，$s < t$ であるときにも (47) に矛盾する．ゆえに，$s = t$ であり，(48) が成立する．□

定理 12. すべての p_i が正であるとき，

(52) $$\hat{f}' = \eta f^*,\ f^* = \sigma \hat{f}',\ \sigma\eta = 1$$

のすべてが成立するための必要十分条件は，

(53) $$Q = R$$

となることである．

証明. 定理 7 より (52) のどれか 1 つが成立するならば，他の 2 つが成立する．それ故，(52) の 1 つが成立するならば，(53) が成立し，逆に (53) が成立するならば，(52) の 1 つが成立することを示せばよい．

（十分性）(52) の最初の式すなわち (40) が成立すると仮定する．このとき，定理 9 より期末収穫問題と期首収穫問題の最適解の関係は (43) で示されるから，(53) が成立する．

（必要性）(53) が成立するならば，(52) の最初の式が成立することを示すために，この対偶の (52) の最初の式が成立しないならば，(53) が成立しないことを示す．(52) の最初の式が成立しないと仮定すると，(20) を考慮して $\hat{f}' > \eta f^*$ が成立する．期末収穫問題の最適解 x_i^*，h_i^* を用いて (19) のように変換したとき，ηx_i^*，ηh_i^* に対して $\hat{f}' > \eta f^*$ であることよりこれらの ηx_i^*，ηh_i^* は期首収穫問題の最適解ではない．これより期首収穫問題の最適解は ηx_i^*，ηh_i^* とは異なった基底解でなければならず，したがって $Q \neq R$ となり，(53) が成立せず，結論をえる．□

定理 13. すべての p_i が正であるとき，

$$\hat{f}' > \eta f^*,\ f^* > \sigma \hat{f}',\ \sigma\eta < 1$$

のすべてが成立するための必要十分条件は，

$$Q \neq R$$

となることである．

証明. (20)，(26)，(28) に注意すると，定理 12 より直ちに結論をえる．□

定理 14.

(54) $$p_i = 1 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

であるならば，

(55) $$\hat{f}' = \eta f^*,\ f^* = \sigma \hat{f}',\ \sigma\eta = 1$$

が成立する．

証明. (54) より期末収穫問題と期首収穫問題の目的関数 (3) と (12) は各々の最適解に対して

(56) $$f^* = \sum_{i=1}^{n} h_i^*,\ \hat{f}' = \sum_{i=1}^{n} \hat{h}_i'$$

となる．(17) の η は (56) の最初の式より

(57) $$\eta = \frac{c}{c + \sum_{i=1}^{n} h_i^*} = \frac{c}{c + f^*}$$

と表せ，(23) の σ は (56) の２番目の式より

(58) $$\sigma = \frac{c}{c - \sum_{i=1}^{n} \hat{h}_i'} = \frac{c}{c - \hat{f}'}$$

と表せる．このとき，$f^* = 0$ であるならば，定理６より $\eta = 1$，$\sigma = 1$ であるから，$\sigma\eta = 1$ となり，定理７より (55) のすべての式が成立する．次に，$f^* > 0$ であるとき，(55) の最初の式が成立しないと仮定して矛盾を導びく，(55) の最初の式が成立しないならば，(20) に注意して

$$\eta f^* < \hat{f}'$$

が成立する．これと (57) より

$$\eta f^* = \frac{cf^*}{c + f^*} < \hat{f}'$$

となり，これより

(59) $$cf^* < c\hat{f}' + f^*\hat{f}'$$

をえる．定理７より (55) の最初の式が成立しないならば，２番目の式も成立せず，(26) より

$$\sigma\hat{f}' < f^*$$

をえる．これと (58) より

$$\sigma\hat{f}' = \frac{c\hat{f}'}{c - \hat{f}'} < f^*$$

となり，これより

(60) $$c\hat{f}' < cf^* - f^*\hat{f}'$$

をえる．(59) と (60) を加えると，矛盾した結果をえる．したがって，$f^* > 0$ であるとき，(55) の最初の式が成立しないという仮定は正しくない．ゆえに(54) が成立するとき，(55) の最初の式が成立する．定理７より (55) の他の式も成立する．　□

定理 15. (54) が成立するとき，(53) が成立する．

証明．定理 12 と 14 より直ちに結論をえる．　□

８．増殖数一定の下での期末収穫問題と期首収穫問題の最適解の関連

Leslie 行列において a_i は i 番目のクラスの雌１個体が１期間経過する間に出産する１番目のクラスの個体数であり，b_i は１期間後に生存している個体数であるから，$a_i + b_i$ は i 番目のクラスの１個体が１期間後に増殖した個体数であると解釈できる．すべてのクラスの $a_i + b_i$ が等しいとき，期末収穫問題と期首収穫問題の最適解の関連を本節で考察する．

定理 16．もし

(61)
$$a_i + b_i = \theta \geqq 1 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

であるならば，(5) が成立する．

証明．(61) が成立するとき，$b_n = 0$ に注意すると，

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 b_1 + \cdots + a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1} - 1 \\ & \quad = (\theta - b_1) + (\theta - b_2) b_1 + \cdots + (\theta - 0) b_1 b_2 \cdots b_{n-1} - 1 \\ & \quad = (1 + b_1 + \cdots + b_1 b_2 \cdots b_{n-1}) \theta - (1 + b_1 + \cdots + b_1 b_2 \cdots b_{n-1}) \\ & \quad = (1 + b_1 + \cdots + b_1 b_2 \cdots b_{n-1})(\theta - 1) \geqq 0 \end{aligned}$$

であるから，(5) が成立する．　□

定理 17．(61) が成立するならば，

(62)
$$\sum_{i=1}^{n} h_i^* = (\theta - 1) c, \ \sum_{i=1}^{n} \hat{h}'_i = (\theta - 1) c / \theta$$

(63)
$$\eta = 1/\theta, \ \sigma = \theta$$

である．

証明．(61) と期末収穫問題に関する (15) より

$$\sum_{i=1}^{n} h_i^* = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) x_i^* - \sum_{i=1}^{n} x_i^* = (\theta - 1) c$$

をえる．(61) と期首収穫問題の最適解に関する (21) より

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{h}'_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \hat{z}_i - \sum_{i=1}^{n} \hat{z}_i = (\theta - 1) \sum_{i=1}^{n} \hat{z}_i$$

をえ，(9) の $\hat{z}_i$ の定義と (8) の最初の式から

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{z}_i = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}'_i - \sum_{i=1}^{n} \hat{h}'_i = c - \sum_{i=1}^{n} \hat{h}'_i$$

をえる．これら２つの式より

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{h}'_i = (\theta - 1) c / \theta$$

となる．以上によって (62) が証明された．次に，(17)，(23)，(62) より

$$\eta = \frac{c}{c + \sum_{i=1}^{n} h_i^*} = \frac{c}{c + (\theta - 1) c} = \frac{1}{\theta}$$

$$\sigma = \frac{c}{c - \sum_{i=1}^{n} \hat{h}'_i} = \frac{c}{c - (\theta - 1)c/\theta} = \theta$$

であるから，(63) をえる．□

定理 18. (61) が成立するとき，期末収穫問題 (3)−(4) と期首収穫問題 (12)−(13) の最適解，これらの問題の目的関数の最大値との間に，

(64)
$$x_i^* = \theta \hat{z}_i,\ h_i^* = \theta \hat{h}'_i \quad (i = 1, \cdots, n),\ f^* = \theta \hat{f}'$$

という関係がある．

証明. (61) が成立するとき，定理 17 の (63) より $\sigma\eta = 1$ となって (42) が成立するから，定理 9 より (43) が成立する．定理 17 の (63) を (43) に適用すると，(64) をえる．□

(61) が成立するとき，定理 18 の (64) より $Q = R$ が成立する．また，$\theta = 1$ であるときには，定理 17 の (62) より

$$\sum_{i=1}^{n} h_i^* = \sum_{i=1}^{n} \hat{h}'_i = 0$$

となるから，(3) と (12) より

$$f^* = \hat{f}' = 0$$

となる．

９．数値例

例題１. (5) を満たす Leslie 行列，各クラスの個体の価格，群全体の個体数を各々

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = 9,\ p_2 = 42,\ p_3 = 40,\ c = 288$$

とする．

このとき，期末収穫問題は，(3) と (4) より

$$f = 9h_1 + 42h_2 + 40h_3$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 288 \\
-4x_2 - 6x_3 + h_1 &= 0 \\
-(1/3)x_1 + x_2 + h_2 &= 0 \\
-(1/2)x_2 + x_3 + h_3 &= 0 \\
x_i \geqq 0,\ h_i \geqq 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3)&
\end{aligned}$$

と表せる．この問題の最適な基底解は３組あり，それらは

$$x_1^* = 288,\ x_2^* = 0,\quad x_3^* = 0,\quad h_1^* = 0,\quad h_2^* = 96,\ h_3^* = 0,\quad f^* = 4{,}032$$

$$x_1^* = 216,\ x_2^* = 72,\ x_3^* = 0,\quad h_1^* = 288,\ h_2^* = 0,\quad h_3^* = 36,\ f^* = 4{,}032$$

$$x_1^* = 192,\ x_2^* = 64,\ x_3^* = 32,\ h_1^* = 448,\ h_2^* = 0,\quad h_3^* = 0,\quad f^* = 4{,}032$$

である．最初の最適解に対する (17) の η の値は，

$$\eta = \frac{c}{c + \sum_{i=1}^{3} h_i^*} = \frac{288}{288 + 96} = \frac{3}{4}$$

であり，２番目と３番目の最適解に対して

$$\eta = \frac{288}{288 + 324} = \frac{8}{17},\ \eta = \frac{288}{288 + 448} = \frac{9}{23}$$

である．

期首収穫問題は，(12) と (13) より

$$f' = 9h_1' + 42h_2' + 40h_3'$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$\begin{array}{rl}
(4/3)z_1 + (9/2)z_2 + 6z_3 & = 288 \\
-\,4z_2 - 6z_3 + h_1' & = 0 \\
-\,(1/3)z_1 + z_2 + h_2' & = 0 \\
-\,(1/2)z_2 + z_3 + h_3' & = 0 \\
z_i \geqq 0,\ h_1' \geqq 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3) &
\end{array}$$

と表せる．この問題の最適解は一意で，

$$\hat{z}_1 = 216,\ \hat{z}_2 = 0,\ \hat{z}_3 = 0,\ \hat{h}_1' = 0,\ \hat{h}_2' = 72,\ \hat{h}_3' = 0,\ \hat{f}' = 3{,}024$$

であり，期首の収穫直前の最適な個体数 $\hat{x}_i'$ は，(9) より

$$\hat{x}_1' = 216,\ \hat{x}_2' = 72,\ \hat{x}_3' = 0$$

である．この最適解に対する (23) の σ の値は，

$$\sigma = \frac{c}{c - \sum_{i=1}^{3} \hat{h}_i'} = \frac{288}{288-72} = \frac{4}{3}$$

である．

このとき，

$$f^* = 4{,}032 > 3{,}024 = \hat{f}'$$

で，定理３の (27) が強い不等号で成立し，定理５のすべての式が成立している．期末収穫問題の最初の最適解から定まる η と期首収穫問題の最適解から定まる σ より

$$\sigma\eta = 1,\ \hat{f}' = 3{,}024 = (3/4) \times 4{,}032 = \eta f^*$$

で，定理７が成立しており，

$$\hat{z}_1 = 216 = (3/4) \times 288 = \eta x_1^*,\ \hat{z}_i = \eta x_i^* = 0 \quad (i = 2,\ 3)$$

$$\hat{h}_1' = \eta h_1^* = 0,\ \hat{h}_2' = 72 = (3/4) \times 96 = \eta h_2^*,\ \hat{h}_3' = \eta h_3^* = 0$$

であるから，定理９の (43) が成立している．期末収穫問題のどの最適解に対しても

$$\sum_{i=1}^{3} h_i^* > \sum_{i=1}^{3} \hat{h}_i'$$

であり，定理 10 の (45) の最初の不等式が成立している．さらに，期末収穫問題の最初の最適解と期首収穫問題の最適解に対して

$$Q = R = \{2\}$$

で，定理 12 の (53) が成立している．なお，期末収穫問題の２番目と３番目の最適解に対して，各々

$$\sigma\eta = \frac{4}{3} \times \frac{8}{17} = \frac{32}{51} < 1,\ \sigma\eta = \frac{4}{3} \times \frac{9}{23} = \frac{12}{23} < 1$$

$$\hat{f}' = 3{,}024 > \frac{8}{17} \times 4{,}032 = \eta f^*,\ \hat{f}' = 3{,}024 > \frac{9}{23} \times 4{,}032 = \eta f^*$$

であるから，定理８が成立しており，定理 13 が示すように

$$Q \neq R$$

である．

例題２．(5) を満たす Leslie 行列，各クラスの個体の価格，群全体の数を各々

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = 1,\ c = 430$$

とする．

このとき，期末収穫問題は，(3) と (4) より

$$f = h_1 + h_2 + h_3$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 430 \\ x_1 - 9x_2 + h_1 &= 0 \\ -(2/3)x_1 + x_2 + h_2 &= 0 \\ -(3/4)x_2 + x_3 + h_3 &= 0 \\ x_i \geqq 0,\ h_i \geqq 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3)& \end{aligned}$$

と表せる．この問題の最適解は一意で，

$$x_1^* = 258,\ x_2^* = 172,\ x_3^* = 0,\ h_1^* = 1{,}290,\ h_2^* = 0,\ h_3^* = 129,\ f^* = 1{,}419$$

である．この最適解に対して (17) より

$$\eta = \frac{c}{c + \sum_{i=1}^{3} h_i^*} = \frac{430}{430 + 1{,}419} = \frac{10}{43}$$

である．

期首収穫問題は，(12) と (13) より

$$f' = h_1' + h_2' + h_3'$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$
\begin{aligned}
(2/3)z_1 + (39/4)z_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 430\\
z_1 - 9z_2 + h'_1 \qquad\qquad &= 0\\
-(2/3)z_1 + z_2 + h'_2 \qquad &= 0\\
-(3/4)z_2 + z_3 + h'_3 &= 0\\
z_i \geqq 0,\ h'_i \geqq 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3)&
\end{aligned}
$$

と表せる．この問題の最適解も一意で，

$$\hat{z}_1 = 60,\ \hat{z}_2 = 40,\ \hat{z}_3 = 0,\ \hat{h}'_1 = 300,\ \hat{h}'_2 = 0,\ \hat{h}'_3 = 30,\ \hat{f}' = 330$$

である．これより期首の収穫直前の最適な個体数 $\hat{x}'_i$ は，

$$\hat{x}'_1 = 360,\ \hat{x}'_2 = 40,\ \hat{x}'_3 = 30$$

である．この最適解に対して (23) より

$$\sigma = \frac{c}{c - \sum_{i=1}^{3} \hat{h}'_i} = \frac{430}{430 - 330} = \frac{43}{10}$$

である．

　このとき，

$$f^* = 1{,}419 > 330 = \hat{f}'$$

で，定理３の (27) が強い不等号で成立し，定理５のすべての式が成立している．また，

$$\sigma\eta = 1,\ \hat{f}' = 330 = (10/43) \times 1{,}419 = \eta f^*$$

であるから，定理 14 の (55) が成立しており，

$$\hat{z}_1 = 60 = (10/43) \times 258 = \eta x^*_1,\ \hat{z}_2 = 40 = (10/43) \times 172 = \eta x^*_2,\ \hat{z}_3 = \eta x^*_3 = 0$$

$$\hat{h}'_1 = 300 = (10/43) \times 1{,}290 = \eta h^*_1,\ \hat{h}'_2 = \eta h^*_2 = 0,\ \hat{h}'_3 = 30 = (10/43) \times 129 = \eta h^*_3$$

であり，定理９の (43) が成立している．さらに，

$$\sum_{i=1}^{3} h^*_i = 1{,}419 > 330 = \sum_{i=1}^{3} \hat{h}'_i$$

で，定理 10 の (45) が成立し，

$$Q = R = \{1,\ 3\}$$

であるから，定理 15 が成立している．

　例題３．Leslie 行列，各クラスの個体の価格，群全体の数を各々

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{4} & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = 1,\ p_2 = 4,\ p_3 = 10,\ c = 240$$

とする．このLeslie 行列は(61)を満たし，

$$a_i + b_i = \theta = 2 \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

である．

　このとき，期末収穫問題は，

$$f = h_1 + 4h_2 + 10h_3$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$\begin{aligned}
x_1 \quad + x_2 \ + x_3 \qquad\qquad &= 240 \\
-(1/2)x_1 - (5/4)x_2 - 2x_3 + h_1 \qquad &= 0 \\
-(1/2)x_1 \quad + x_2 \qquad + h_2 \quad &= 0 \\
-(3/4)x_2 \ + x_2 \qquad + h_3 &= 0 \\
x_i \geqq 0,\ h_i \geqq 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3)&
\end{aligned}$$

と表せる．この問題の最適解は一意で

$$x_1^* = 160,\ x_2^* = 80,\ x_3^* = 0,\ h_1^* = 180,\ h_2^* = 0,\ h_3^* = 60,\ f^* = 780$$

である．この最適解に対して

$$\eta = \frac{c}{c + \sum_{i=1}^{3} h_i^*} = \frac{240}{240 + 240} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\theta}$$

である．

　期首収穫問題は，

$$f' = h_1' + 4h_2' + 10h_3'$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$\begin{aligned}
2z_1 \quad + 2z_2 + 2z_3 \qquad\qquad &= 240 \\
-(1/2)z_1 - (5/4)z_2 - 2z_3 + h_1' \qquad &= 0 \\
-(1/2)z_1 \quad + z_2 \qquad + h_2' \quad &= 0 \\
-(3/4)z_2 \ + z_3 \qquad + h_3' &= 0 \\
z_i \geqq 0,\ h_i' \geqq 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3)&
\end{aligned}$$

と表せる．この問題の最適解も一意で

$$\hat{z}_1 = 80,\ \hat{z}_2 = 40,\ \hat{z}_3 = 0,\ \hat{h}_1' = 90,\ \hat{h}_2' = 0,\ \hat{h}_3' = 30,\ \hat{f}' = 390$$

である．これより期首の収穫直前の最適な個体数 $\hat{x}_i'$ は，

$$\hat{x}_1' = 170,\ \hat{x}_2' = 40,\ \hat{x}_3' = 30$$

である．この最適解に対して

$$\sigma = \frac{c}{c - \sum_{i=1}^{3} \hat{h}_i'} = \frac{240}{240 - 120} = 2 = \theta$$

である．

　以上より

$$f^* = 780 > 390 = \hat{f}'$$

で，定理３の (27) が強い不等号で成立し，定理５のすべての式が成立している．また，

$$\sigma\eta = 1,\ \hat{f}' = 390 = (1/2) \times 780 = \eta f^*$$

であるから，定理７が成立している．そして

$$\sum_{i=1}^{3} h_i^* = (2-1) \times 240 = 240,\ \sum_{i=1}^{3} \hat{h}_i' = (2-1) \times 240/2 = 120$$

であるから，定理 17 の (62) が成立し，

$$x_1^* = 160 = 2 \times 80 = \theta\hat{z}_1,\ x_2^* = 80 = 2 \times 40 = \theta\hat{z}_2,\ x_3^* = \theta\hat{z}_3 = 0$$

$$h_1^* = 180 = 2 \times 90 = \theta\hat{h}_1',\ h_2^* = \theta\hat{h}_2' = 0,\ h_3^* = 60 = 2 \times 30 = \theta\hat{h}_3'$$

であり，定理 18 の (64) が成立している．また，

$$Q = R = \{1,\ 3\}$$

が成立している．

参考文献

［１］Anton, H., and Rorres, C., *Elementary Linear Algebra with Applications*. New York : John Wiley & Sons, 1987.

［２］Beddington, J. R., and Taylor, D. B., “Optimal Age Specific Harvesting of a Population,” *Biometrics*, Vol. 29 (1973), pp. 801–809.

［３］Collatz, L., and Wetterling, W., *Optimization Problems*. New York : Springer-Verlag, 1975.

［４］Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*. Princeton, N. J. : Princeton University Press, 1963.

［５］Doubleday, W. G., “Harvesting in Matrix Population Models,” *Biometrics*, Vol. 31 (1975), pp. 189–200.

［６］Goldman, A. J., and Tucker, A. W., “Theory of Linear Programming,” in Kuhn, H. W., and Tucker, A. W. (eds.), *Linear Inequalities and Related Systems*. Princeton, N. J. : Princeton University Press, 1956, pp. 53–97.

［７］Kolman, B., and Beck, R. E., *Elementary Linear Programming with Applications*. Second Ed., New York : Academic Press, 1995.

［８］Lefkovitch, L. P., “A Theoretical Evaluation of Population Growth after Removing Individuals from Some Age Groups,” *Bulletin of Entmological Research*, Vol. 57 (1967), pp. 437–445.

［９］Leslie, P. H., “On the Use of Matrices in Certain Population Mathematics,” *Biometrika*, Vol. 33 (1945), pp. 183–212.

［10］Leslie, P. H., “Some Further Notes on the Use of Matrices in Population Mathematics,” *Biometrika*, Vol. 35 (1948), pp. 213–245.

［11］Lewis, E. G., “On the Generation and Growth of a Population,” *Sankhya*, Vol. 6 (1942), pp. 93–96.

［12］尾崎雄一郎,「Leslie 行列に基づいた収穫問題とリニアー・プログラミング」,『名城商学』, Vol. 40, No. 3 (1990 年), pp. 18–39.

［13］尾崎雄一郎,「Leslie 行列と収穫問題並びにリニアー・プログラミング」,『名城商学』, Vol. 41, No. 3 (1991 年), pp. 1–14.

［14］尾崎雄一郎,「Leslie 行列に基づいた期首収穫問題と期末収穫問題の比較」,『名城商学』, Vol. 42, No. 2 (1992 年), pp. 1–15.