リニアー・プログラミングの制約条件集合の非有界性に関する Clark の定理

尾　崎　雄一郎

リニアー・プログラミングの主問題の制約条件によって定まる実行可能解の集合と双対問題の制約条件によって定まる実行可能解の集合の両方が空でないならば，いずれかの集合は有界ではないという事実を Clark［2］が証明した．その後これは Charnes, Cooper, and Thompson［1］によって異なった方法で証明され，Williams［11］によって拡張されている．この小論文においてこの Clark の定理を別の方法で証明する．

所与の $m \times n$ 行列を A，m 次元列ベクトルを b，n 次元列ベクトルを c とし，行列とベクトルの転置を $'$ で表す．以下において

(1) $$c'x$$

を次の制約条件の下で最大にする

(2) $$Ax \leqq b,\quad x \geqq 0$$

というリニアー・プログラミングの主問題を考える．この双対問題は，

(3) $$b'y$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$A'y \geqq c\ ,\ y \geqq 0$$

と表せる．主問題の制約条件 (2) によって与えられる集合を

$$X = \{x \mid Ax \leqq b,\ x \geqq 0\}$$

とし，双対問題の制約条件 (4) に定まる集合を

$$Y = \{y \mid A'y \geqq c,\ y \geqq 0\}$$

とする．第 i 要素が 1 で他のすべての要素がゼロである m 次元単位ベクトルを $e(i)$，第 j 要素が 1 で他のすべての要素がゼロである n 次元単位ベクトルを $e(j)$ と表す．

補助定理１（Williams［11］)．$X \neq \phi$ であるとき，主問題 (1)−(2) の変数 x_j が X において有界であるための必要十分条件は，

(5) $$A'p \geqq e(j),\ p \geqq 0$$

が成立する $p \in R^m$ が存在することである．

証明．このとき，

(6) $$e(j)'x$$

を次の制約条件の下で最大にする

(7) $$Ax \leqq b,\ x \geqq 0$$

という主問題と，

(8)
$$y'b$$
を次の制約条件の下で最小にする

(9)
$$A'y \geqq e(j),\ y \geqq 0$$
という双対問題を考える．

（十分性）(5) を満たす解が存在すると仮定する．これより (9) に実行可能解が存在する．仮定により $X \neq \phi$ であるから，(7) に実行可能解が存在する．したがって，双対定理の１つにより[1] 主問題 (6)－(7) と双対問題 (8)－(9) に最適解が存在する．それ故，目的関数 (6) の値 $e(j)'x = x_j$ は上に有界である．

（必要性）主問題 (1)－(2) の変数 x_j が X において有界であるとする．すると，別の双対定理によって[2] 主問題 (6)－(7) に最適解が存在する．主問題に最適解が存在するならば，その双対問題 (8)－(9) にも最適解が存在する．[3] したがって，(9) に実行可能解が存在し，(5) を満たす解が存在する．

□

補助定理２．$Y \neq \phi$ であるとき，双対問題 (3)－(4) の変数 y_i が Y において有界であるための必要十分条件は，

(10)
$$-Aq \geqq e(i),\ q \geqq 0$$
が成立する $q \in R^n$ が存在することである．

証明．ここで，

(11)
$$e(i)'y$$
を次の制約条件の下で最大にする

(12)
$$-A'y \leqq -c,\ y \geqq 0$$
という主問題と，

(13)
$$-c'x$$
を次の制約条件の下で最小にする

(14)
$$-Ax \geqq e(i),\ x \geqq 0$$
という双対問題を考える．

（十分性）(10) を満たす解が存在すると仮定する．すると，(14) に実行可能解が存在する．仮定により $Y \neq \phi$ であるから，(12) に実行可能解が存在する．したがって，双対定理により主問題 (11)－(12) と双対問題 (13)－(14) に最適解が存在する．したがって，目的関数 (11) の値 $e(i)'y = y_i$ は上に有界である．

（必要性）双対問題 (3)－(4) の変数 y_i が Y において有界であるとすると，双対定理により主問題

1　たとえば，Collatz and Wetterling［３］, p. 93, Gale［５］, pp. 12, 78-82, Gass［６］, p. 162, Goldman and Tucker［７］, p. 61, Krekó［10］, pp. 194-195 などを参照のこと．

2　Collatz and Wetterling［３］, p. 114, Dantzig［４］, pp. 134-135, Goldman and Tucker［７］, p. 60, Kolman and Beck［９］, pp. 174-175 などを参照のこと．

3　たとえば，Collatz and Wetterling［３］, pp. 90-92, Gass［６］, pp. 158-161, Hadley［８］, pp. 229-230, Krekó［10］, pp. 193-194 などを参照のこと．

(11)−(12) に最適解が存在し，双対問題 (13)−(14) に最適解が存在するから，(14) に実行可能解が存在する．このことは (10) を満たす解が存在することを意味する．□

次に，Clark［２］による定理を新しい方法で証明する．

定理． リニアー・プログラミングの主問題 (1)−(2) の制約条件集合 X と双対問題 (3)−(4) の制約条件集合 Y がともに空でないとき，X か Y のいずれかは有界ではない．

証明． すべての要素が 1 である n 次元あるいは m 次元列ベクトルを e とする．主問題 (1)−(2) のすべての変数が X において有界であるならば，補助定理 1 を用いて

(15)
$$A'p \geqq e,\ p \geqq 0$$

を満たす $p \in R^m$ が存在する．また，双対問題 (3)−(4) のすべての変数が Y において有界であるならば，補助定理 2 を用いて

(16)
$$-Aq \geqq e,\ q \geqq 0$$

を満たす $q \in R^n$ が存在する．(15) の前から (16) を満たす q を掛けると，

(17)
$$q'A'p \geqq q'e = \sum_{j=1}^{n} q_j > 0$$

となり，(16) の前から (15) を満たす p を掛けると，

(18)
$$-p'Aq \geqq p'e = \sum_{i=1}^{n} p_i > 0$$

となる．ここで，$q'A'p = p'Aq$ であるから，(17) と (18) より

$$0 < \sum_{j=1}^{n} q_j \leqq q'A'p = p'Aq \leqq -\sum_{i=1}^{m} p_i < 0$$

という矛盾した結果をえる．したがって，もし X がすべての変数について有界で (15) が成立するならば，Y がすべての変数について有界で (16) が成立することはなく，逆にもし Y がすべての変数について有界で (16) が成立するならば，X がすべての変数について有界で (15) が成立することはない．□

例題１．
$$f = 2x_1 + 3x_2$$
を次の制約条件の下で最大にする

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leqq \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix},\ x \geqq 0$$

という主問題と，

$$f = 4y_1 + 6y_2$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$A'y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geqq \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ y \geqq 0$$

という双対問題を考える．

これらの問題の最適解と最適解に対する目的関数の値は，

$$x_1^* = x_2^* = 2,\ y_1^* = y_2^* = 1,\ f^* = 10$$

である．明らかに主問題の実行可能解の集合 X は有界で，双対問題の実行可能解の集合 Y は有界ではない．一層詳しくは，

$$A'p=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\end{bmatrix}\geqq\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=e(1),\ p\geqq 0$$

$$A'p=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\end{bmatrix}\geqq\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=e(2),\ p\geqq 0$$

において，たとえば $p=(1\quad 1)'$ は各々の式を満たすので，補助定理１より X は x_1 と x_2 に関して有界である．しかし，

$$-Aq=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix}\geqq\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=e(1),\ q\geqq 0$$

$$-Aq=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix}\geqq\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=e(2),\ q\geqq 0$$

の各々を満たす q は存在せず，補助定理２より Y は y_1，y_2 いずれに関しても有界ではない．したがって，Clark の定理が成立していることがわかる．

例題２．　$$f=2x_2$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$Ax=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\leqq\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ x\geqq 0$$

という主問題と，

$$f=y_2$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$A'y=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}\geqq\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix},\ y\geqq 0$$

という双対問題を考える．

これらの問題の最適解と最適解に対する目的関数の値は，

$$x_1^*=\theta\ (\theta\geqq 0),\ x_2^*=0,\ y_1^*=2+\mu\ (\mu\geqq 0),\ y_2^*=0,\ f^*=0$$

であり，このときX と Y はともに有界ではない．詳しくは，

$$A'p=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\end{bmatrix}\geqq\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=e(1),\ p\geqq 0$$

を満たす解 p は存在しないけれども，

$$A'p=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\end{bmatrix}\geqq\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=e(2),\ p\geqq 0$$

には，たとえば $p=(1\quad 0)'$ という解が存在するので，補助定理１より X は x_1 に関して有界ではないが，x_2 に関して有界である．したがって，主問題の実行可能解の集合 X は有界ではなく，第１図のように表される．

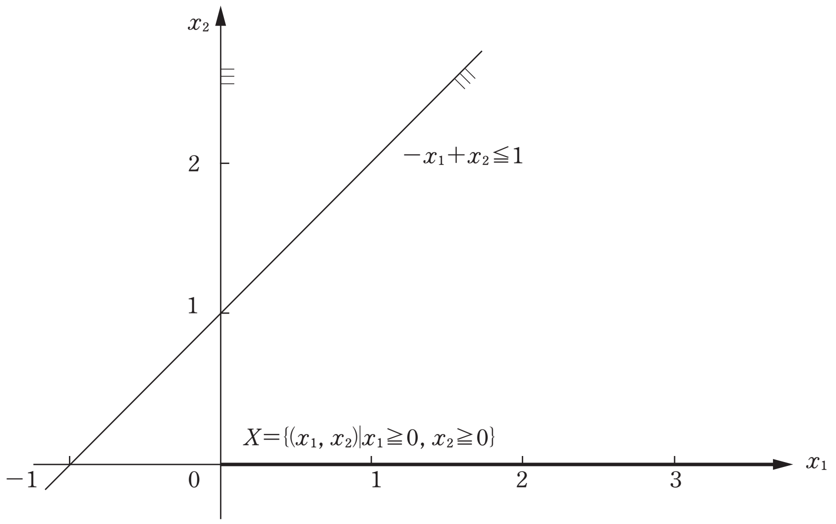
また，

$$-Aq=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\q_2\end{bmatrix}\geqq\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=e(1),\ q\geqq 0$$

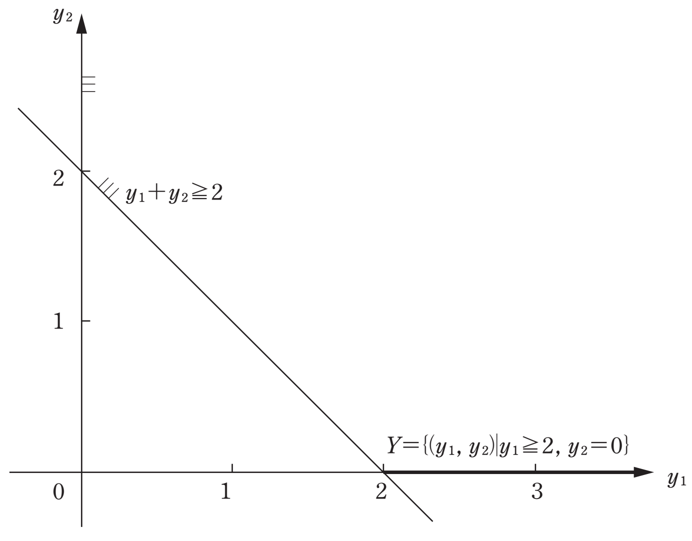
を満たす q は存在しないが，

$$-Aq=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\q_2\end{bmatrix}\geqq\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=e(2),\ q\geqq 0$$

には，たとえば $q=(1\quad 0)'$ という解が存在するので，補助定理２より Y は y_1 に関して有界ではないが，y_2 に関しては有界である．ゆえに，双対問題の実行可能解の集合 Y は有界ではなく，第２図



第１図



第２図

のように表される．

例題２の場合，X と Y がともに有界でないという形で Clark の定理が成立しており，主問題と双対問題の実行可能解の集合がともに最適解の集合と一致している．

参考文献

［１］Charnes, A., Cooper, W. W., and Thompson, G. L., "Some Properties of Redundant Constraints and Extraneous Variables in Direct and Dual Linear Programming Problems," *Operations Research*, Vol. 10（1962）, pp. 711-723.

［２］Clark, F. E., "Remark on the Constraint Sets in Linear Programming," *American Mathematical Monthly*, Vol. 68（1961）, pp. 351-352.

［３］Collatz, L., and Wetterling, W., *Optimization Problems*. New York : Springer-Verlag, 1975.

［４］Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*. Princeton, N. J. : Princeton University Press, 1963.

［５］Gale, D., *The Theory of Linear Economic Models*. New York : McGraw-Hill Book Co., 1960.

［６］Gass, S. I., *Linear Programming : Methods and Applications*. Fifth Ed., New York : McGraw-Hill Book Co., 1985.

［７］Goldman, A. J., and Tucker, A. W., "Theory of Linear Programming," in Kuhn, H. W., and Tucker, A. W.（eds.）, *Linear Inequalities and Related Systems*. Princeton, N. J. : Princeton University Press, 1953, pp. 53-97.

［８］Hadley, G., *Linear Programming*. Reading, Mass. : Addison-Wesley Publishing Co., 1962.

［９］Kolman, B., and Beck, R. E., *Elementary Linear Programming with Applications*. Second Ed., New York : Academic Press, 1995.

［10］Krekó, B., *Linear Programming*. London : Sir Isaac Pitman & Sons, 1968.

［11］Williams, A. C., "Bounded Relations for Linear Constraint Sets," *Linear Algebra and Its Applications*, Vol. 3（1970）, pp. 129-141.