固定生産係数の下での Rybczynski 定理とその拡張効果

尾　崎　雄一郎

1．はじめに

２つの産業が２つの生産要素を異なった集約度で用いて各々の財を生産する経済において，各々の生産関数の１次同次性，各々の生産要素の完全雇用と両財の価格の不変性を仮定するとき，ある生産要素の賦存量が増加するならば，それを相対的に高い比率で用いる産業の生産量は増加し，相対的に低い比率で用いる産業の生産量は減少することを Rybczynski［10］が幾何学的に証明した（Batra［１］, pp. 37-38, Chacholiades［２］, pp. 340-344, Gandolfo［３］, pp. 172-173, Jones［５］, Kemp［６］, pp. 14-16, Kenen［７］, pp. 69-71, 566-567, Krauss and Johnson［８］, pp. 106-109, Silberberg［11］, pp. 507-508, 561-562, Södersten［12］, pp. 152-156, Takayama［13］, pp. 57, 63-65 なども参照のこと）．さらに，Jones［４］は増加した生産要素を相対的に高い比率で用いる産業の生産量の増加率が生産要素の増加率よりも大きい，という「拡張効果」を見出した（拡張効果については Batra［１］, pp. 38-39, Gandolfo［３］, pp. 196-197, Kemp［６］, pp. 14-16, Silberberg［11］, pp. 508-509, 563, Takayama［13］, pp. 58-59, Woodland［14］, pp. 83-85 なども参照のこと）．尾崎［９］は固定生産係数の下で Rybczynski 定理とその拡張効果をリニアー・プログラミングを用いて幾何学的に幾つかの方法で示すとともに，生産要素の増加によって経済全体の生産物の価値額も増加するけれども，その増加率は生産要素の増加率よりも小さいことを明らかにした．

これら２財，２要素モデルの下での考察に対して，本論文において n 財，n 要素の固定生産係数モデルの下でリニアー・プログラミングを用いて Rybczynski 定理とその拡張効果，またある生産要素が増加するとき，経済全体の生産物の価値額の増加率は生産要素の増加率よりも小さいことを明らかにする．

なお，ある生産物価格が上昇するとき，ある生産要素の価格が上昇し，別のある生産要素の価格が下落するとともに，ある生産要素の価格上昇率は生産物価格の上昇率よりも大きく，経済全体の生産要素の評価額の増加率は生産物価格の上昇率よりは小さい，という固定生産係数に基づく n 財，n 要素モデルの下での Stolper-Samuelson 定理やその拡張効果などもこの論文の方法と同様に証明できる．

2．モデル

第 j 財を１単位生産するのに必要な第 i 要素の量を a_{ij}，第 i 要素の賦存量を b_i，第 j 財の価格を p_j，第 j 財の生産量を y_j とし，

$$a_{ij}>0,\quad b_i>0,\quad p_j>0 \qquad (i,\ j=1,\ \cdots,\ n)$$

であるとする．いま，

(1)
$$z=p_1y_1+p_2y_2+\cdots+p_ny_n$$

を次の制約条件の下で最大にする

(2)
$$\begin{aligned}a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n &\leqq b_1\\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n &\leqq b_2\\ &\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\cdots+a_{nn}y_n &\leqq b_n\\ y_j \geqq 0 \quad (j=1,\cdots,n)&\end{aligned}$$

というリニアー・プログラミングの問題を考える．ここで，目的関数 (1) における z は経済全体の生産物の価値額を表し，制約条件 (2) の i 番目の式は左辺の各産業の第 i 要素に対する需要量の合計が右辺の第 i 要素の賦存量を超えてはならないことを表す．最後の条件はすべての産業の生産量が非負でなければならないことを表す．

この双対問題は，

(3)
$$b_1w_1+b_2w_2+\cdots+b_nw_n$$

を次の制約条件の下で最小にする

(4)
$$\begin{aligned}a_{11}w_1+a_{21}w_2+\cdots+a_{n1}w_n &\geqq p_1\\ a_{12}w_1+a_{22}w_2+\cdots+a_{n2}w_n &\geqq p_2\\ &\cdots\cdots\cdots\\ a_{1n}w_1+a_{2n}w_2+\cdots+a_{nn}w_n &\geqq p_n\\ w_i \geqq 0 \quad (i=1,\cdots,n)&\end{aligned}$$

と表される．ここで，w_i は第 i 要素に対するシャドー・プライスで，目的関数 (3) はシャドー・プライスによる経済全体の要素評価額である．制約条件 (4) の j 番目の式は左辺の第 j 財を生産するのに必要な要素費用の合計が右辺の第 j 財の価格を下回ってはならないことを表し，最後の条件はすべてのシャドー・プライスが非負でなければならないことを表す．

仮定によりすべての a_{ij}，b_i，p_j が正であるから，主問題と双対問題各々に実行可能解が存在する．それ故，双対定理により主問題と双対問題各々に最適解が存在し，最適解に対する目的関数 (1) と目的関数 (3) の値は等しい．主問題の最適解を y_j^* $(j=1,\ \cdots,\ n)$，目的関数 (1) の最大値を z^*，双対問題の最適解を w_i^* $(i=1,\ \cdots,\ n)$ とし，

(5)
$$y_j^*>0 \quad (j=1,\ \cdots,\ n)$$

(6)
$$w_i^*>0 \quad (i=1,\ \cdots,\ n)$$

であると仮定する．(6) に注意して相補弛緩定理を適用すると，(1) と (2) より

(7)
$$\begin{aligned}p_1y_1^*+p_2y_2^*+\cdots+p_ny_n^* &= z^*\\ a_{11}y_1^*+a_{12}y_2^*+\cdots+a_{1n}y_n^* &= b_1\\ a_{21}y_1^*+a_{22}y_2^*+\cdots+a_{2n}y_n^* &= b_2\\ &\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}y_1^*+a_{n2}y_2^*+\cdots+a_{nn}y_n^* &= b_n\end{aligned}$$

が成立し，制約条件 (2) の最初の n 個の不等式がすべて等号で成立する．同様に，(5) に注意して双

対定理と相補弛緩定理を用いると，(3) と (4) より

(8)
$$\begin{aligned} b_1 w_1^* + b_2 w_2^* + \cdots + b_n w_n^* &= z^* \\ a_{11} w_1^* + a_{21} w_2^* + \cdots + a_{n1} w_n^* &= p_1 \\ a_{12} w_1^* + a_{22} w_2^* + \cdots + a_{n2} w_n^* &= p_2 \\ &\cdots\cdots \\ a_{1n} w_1^* + a_{2n} w_2^* + \cdots + a_{nn} w_n^* &= p_n \end{aligned}$$

が成立する．

(2) の左辺の係数による n 次の行列式を D とし，

(9)
$$D > 0$$

であると仮定し，D の第 i 行，第 j 列を除いた $n-1$ 次の小行列式を D_{ij} と表す．Cramer のルールを用いて (7) の２番目から $n+1$ 番目までの式の y_j^* を解くと，

(10)
$$y_j^* = \frac{(-1)^{1+j} D_{1j} b_1 + (-1)^{2+j} D_{2j} b_2 + \cdots + (-1)^{n+j} D_{nj} b_n}{D} \quad (j = 1, \cdots, n)$$

であり，同様に(8) の w_i^* を解くと，

(11)
$$w_i^* = \frac{(-1)^{i+1} D_{i1} p_1 + (-1)^{i+2} D_{i2} p_2 + \cdots + (-1)^{i+n} D_{in} p_n}{D} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

である．

３．n 財，n 要素の下での Rybczynski 定理

ある生産要素たとえば１番目の生産要素の賦存量が b_1 から $b_1 + \Delta b_1$ へ増加し，他の生産要素の賦存量は不変であるとする．このとき，主問題 (1) − (2) に対応する問題の最適解を y_j^* からの変化量として $y_j^* + \Delta y_j^* (j = 1, \cdots, n)$，双対問題 (3) − (4) に対応する問題の最適解を w_i^* からの変化量として $w_i^* + \Delta w_i^* (i = 1, \cdots, n)$，これらの最適解に対応する主問題の目的関数の最大値を z^* からの変化量として $z^* + \Delta z^*$ と表し，Δb_1 の増加が小さいものとする．(5) と (6) が成立することより

(12)
$$y_j^* + \Delta y_j^* > 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

(13)
$$w_i^* + \Delta w_i^* > 0 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

であると仮定できる．

前と同様，(13) を考慮して相補弛緩定理を適用すると，(1) と (2) より

(14)
$$\begin{aligned} p_1 (y_1^* + \Delta y_1^*) + p_2 (y_2^* + \Delta y_2^*) + \cdots + p_n (y_n^* + \Delta y_n^*) &= z^* + \Delta z^* \\ a_{11} (y_1^* + \Delta y_1^*) + a_{12} (y_2^* + \Delta y_2^*) + \cdots + a_{1n} (y_n^* + \Delta y_n^*) &= b_1 + \Delta b_1 \\ a_{21} (y_1^* + \Delta y_1^*) + a_{22} (y_2^* + \Delta y_2^*) + \cdots + a_{2n} (y_n^* + \Delta y_n^*) &= b_2 \\ &\cdots\cdots \\ a_{n1} (y_1^* + \Delta y_1^*) + a_{n2} (y_2^* + \Delta y_2^*) + \cdots + a_{nn} (y_n^* + \Delta y_n^*) &= b_n \end{aligned}$$

となる．(12) に注意して相補弛緩定理を適用すると，(3) と (4) より

$$(b_1+\Delta b_1)(w_1^*+\Delta w_1^*)+\ b_2(w_2^*+\Delta w_2^*)+\cdots+\ b_n(w_n^*+\Delta w_n^*)=z^*+\Delta z^*$$
$$a_{11}(w_1^*+\Delta w_1^*)+a_{21}(w_2^*+\Delta w_2^*)+\cdots+a_{n1}(w_n^*+\Delta w_n^*)=p_1$$
$$(15)\qquad a_{12}(w_1^*+\Delta w_1^*)+a_{22}(w_2^*+\Delta w_2^*)+\cdots+a_{n2}(w_n^*+\Delta w_n^*)=p_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{1n}(w_1^*+\Delta w_1^*)+a_{2n}(w_2^*+\Delta w_2^*)+\cdots+a_{nn}(w_n^*+\Delta w_n^*)=p_n$$

となる．(7)と(14)より

$$p_1\Delta y_1^*+\ p_2\Delta y_2^*+\cdots+\ p_n\Delta y_n^*=\Delta z^*$$
$$a_{11}\Delta y_1^*+a_{12}\Delta y_2^*+\cdots+a_{1n}\Delta y_n^*=\Delta b_1$$
$$(16)\qquad a_{21}\Delta y_1^*+a_{22}\Delta y_2^*+\cdots+a_{2n}\Delta y_n^*=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1}\Delta y_1^*+a_{n2}\Delta y_2^*+\cdots+a_{nn}\Delta y_n^*=0$$

をえる．(16)の２番目から $n+1$ 番目までの n 個の連立方程式を Cramer のルールを用いて解くと，

$$(17)\qquad \Delta y_j^*=\frac{(-1)^{1+j}D_{1j}}{D}\Delta b_1\quad (j=1,\cdots,n)$$

となる．

仮定によりすべての a_{ij} が正であり，$\Delta b_1>0$ であるから，(16)の２番目の式よりすべての Δy_j^* がゼロとなることはなく，(16)の３番以下の式からすべての Δy_j^* が非負で，少なくとも１つが正であったり，またすべての Δy_j^* が非正で，少なくとも１つが負であることはない．したがって，少なくとも１つの Δy_j^* は正であり，少なくとも１つの Δy_j^* は負である．このことは n 財，n 要素モデルで Rybczynski 定理が成立することを意味する．

必要ならば財の番号をつけ変えることによって，$\Delta y_1^*>0$，すなわち

$$\Delta y_1^*=\frac{D_{11}}{D}\Delta b_1>0$$

と仮定できる．また，(8)と(15)より

$$(\Delta b_1)w_1^*+(b_1+\Delta b_1)\Delta w_1^*+\ b_2\Delta w_2^*+\cdots+\ b_n\Delta w_n^*=\Delta z^*$$
$$a_{11}\Delta w_1^*+a_{21}\Delta w_2^*+\cdots+a_{n1}\Delta w_n^*=0$$
$$(18)\qquad a_{12}\Delta w_1^*+a_{22}\Delta w_2^*+\cdots+a_{n2}\Delta w_n^*=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{1n}\Delta w_1^*+a_{2n}\Delta w_2^*+\cdots+a_{nn}\Delta w_n^*=0$$

をえる．(18)の２番目から $n+1$ 番目の式において，(9)に注意して Δw_i^* を求め，これらの結果を(18)の最初の式に代入すると，

$$(19)\qquad \Delta w_i^*=0\quad (i=1,\cdots,n),\quad \Delta z^*=(\Delta b_1)w_1^*$$

となり，すべてのシャドー・プライスはある生産要素の量が変化しても変化しない．

４．拡張効果と経済全体の生産物の価値額の増加率

本節で, n 財, n 要素モデルでの拡張効果と経済全体の生産物の価値額の増加率について考察する. (10) と (17) より

(20) $$\frac{\Delta y_j^*}{y_j^*}\Big/\frac{\Delta b_1}{b_1}=\frac{(-1)^{1+j}D_{1j}b_1}{(-1)^{1+j}D_{1j}b_1+(-1)^{2+j}D_{2j}b_2+\cdots+(-1)^{n+j}D_{nj}b_n}\quad (j=1,\cdots,n)$$

が成立し, (20) より

(21) $$\left(\frac{\Delta y_j^*}{y_j^*}\Big/\frac{\Delta b_1}{b_1}\right)-1=\frac{(-1)^{3+j}D_{2j}b_2+\cdots+(-1)^{n+1+j}D_{nj}b_n}{(-1)^{1+j}D_{1j}b_1+(-1)^{2+j}D_{2j}b_2+\cdots+(-1)^{n+j}D_{nj}b_n}\quad (j=1,\cdots,n)$$

が成立する. (5), (9), (10) より, (21) の分母は正である. 前節で示したように, (17) の Δy_j^* ($j=2,\cdots,n$) のうち少なくとも１つは負であるから, (20) と (21) において少なくとも１つの式は負である. このことより (21) の右辺の分子のうち少なくとも１つは負でなければならない.

しかし, (21) の n 個の式の中の少なくとも１つは正であることを以下において示す. このために (21) の右辺の分子すべてが正ではないと仮定して矛盾を導びく. (21) の右辺の分子すべてが正ではないと仮定すると,

(22) $$\begin{aligned}&(-1)^{3+1}D_{21}b_2+(-1)^{4+1}D_{31}b_3+\cdots+(-1)^{n+2}D_{n1}b_n\leqq 0\\&(-1)^{3+2}D_{22}b_2+(-1)^{4+2}D_{32}b_3+\cdots+(-1)^{n+3}D_{n2}b_n\leqq 0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&(-1)^{n+3}D_{2n}b_2+(-1)^{n+4}D_{3n}b_3+\cdots+(-1)^{2n+1}D_{nn}b_n\leqq 0\end{aligned}$$

が成立することになる. すべての a_{ij} が正であることに注意して (22) の最初の式に a_{11} を, ２番目の式に a_{12} を, 以下同様に n 番目の式に a_{1n} を掛け, このようにしてえられた式をすべて合計して整理すると, (21) の右辺の分子のうち少なくとも１つは負であるから, 次式全体が負, すなわち

(23) $$\begin{aligned}&-\{(-1)^3a_{11}D_{21}+(-1)^4a_{12}D_{22}+\cdots+(-1)^{n+2}a_{1n}D_{2n}\}b_2\\&-\{(-1)^4a_{11}D_{31}+(-1)^5a_{12}D_{32}+\cdots+(-1)^{n+3}a_{1n}D_{3n}\}b_3\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&-\{(-1)^{n+1}a_{11}D_{n1}+(-1)^{n+2}a_{12}D_{n2}+\cdots+(-1)^{2n}a_{1n}D_{nn}\}b_n<0\end{aligned}$$

が成立しなければならない. 他方, (7) の２番目以下の式の左辺の係数行列を A, n 次の単位行列を I とする. (9) に注意すると, A^{-1} が存在し, $AA^{-1}=I$ であるから,

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_{11}&-D_{21}&\cdots&(-1)^{n+1}D_{n1}\\-D_{12}&D_{22}&\cdots&(-1)^{n+2}D_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(-1)^{n+1}D_{1n}&(-1)^{n+2}D_{2n}&\cdots&D_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D&0&\cdots&0\\0&D&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&D\end{bmatrix}$$

が成立する. この左辺の最初の行列の第１行と２番目の行列の第２列から第 n 列までの各々の積は, すべてゼロであるから,

(24) $$\begin{aligned}&-a_{11}D_{21}+a_{12}D_{22}+\cdots+(-1)^{n+2}a_{1n}D_{2n}=0\\&a_{11}D_{31}-a_{12}D_{32}+\cdots+(-1)^{n+3}a_{1n}D_{3n}=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&(-1)^{n+1}a_{11}D_{n1}+(-1)^{n+2}a_{12}D_{n2}+\cdots+(-1)^{2n}a_{1n}D_{nn}=0\end{aligned}$$

が成立する．すべての b_i が正であるから，明らかに(23)と(24)は矛盾する．したがって，(22)が成立せず，(22)において少なくとも１つの不等式は正でなければならない．一般性を失なうことなく，(22)の１番目の式が正であるとすることができる．これと(21)より

$$\frac{\Delta y_1^*}{y_1^*} > \frac{\Delta b_1}{b_1} \tag{25}$$

が成立する．(25)は Rybczynski 定理における拡張効果を表す．

さらに，(8)の最初の式と(19)より

$$\frac{\Delta z^*}{z^*} = \frac{(\Delta b_1)w_1^*}{\sum_{i=1}^{n} b_i w_i^*}$$

であり，(6)，$b_i > 0$，$\Delta b_1 > 0$ よりこれは正である．これより

$$\frac{\Delta z^*}{z^*} \bigg/ \frac{\Delta b_1}{b_1} = \frac{b_1 w_1^*}{\sum_{i=1}^{n} b_i w_i^*} < 1$$

が成立する．したがって，これより

$$0 < \frac{\Delta z^*}{z^*} < \frac{\Delta b_1}{b_1} \tag{26}$$

をえる．(26)は経済全体の生産物の価値額はある生産要素の増加によって増加するけれども，その増加率は生産要素の増加率よりも小さいことを表す．(25)と(26)をまとめ，ある財たとえば $j=n$ に対して $\Delta y_n^* < 0$ が成立するから，

$$\frac{\Delta y_1^*}{y_1^*} > \frac{\Delta b_1}{b_1} > \frac{\Delta z^*}{z^*} > 0 > \frac{\Delta y_n^*}{y_n^*}$$

が成立する．

５．数値例

本節で，３財，３要素の固定生産係数モデルでの Rybczynski 定理とその拡張効果，生産物の総価値額の増加率を数値例で示す．

例題１． 生産係数，要素賦存量，生産物価格の各々を

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = 40,\ \ b_2 = 40,\ \ b_3 = 50$$

$$p_1 = 8,\ \ p_2 = 8,\ \ p_3 = 10$$

とし，１番目の生産要素の賦存量の増加を

$$\Delta b_1 = 10$$

とする．

与えられた生産係数，要素賦存量，生産物価格の下で生産物の価値額を最大にする問題は，

$$z=8y_1+8y_2+10y_3$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$0.4y_1+0.1y_2+0.3y_3 \leqq 40$$
$$0.1y_1+0.4y_2+0.2y_3 \leqq 40$$
$$0.3y_1+0.2y_2+0.4y_3 \leqq 50$$
$$y_j \geqq 0 \quad (j=1, 2, 3)$$

と表せる．ここで，

$$D=|A|=0.02$$
$$D_{11}=\ \ 0.12, \quad D_{12}=-0.02, \quad D_{13}=-0.10$$
$$D_{21}=-0.02, \quad D_{22}=\ \ 0.07, \quad D_{23}=\ \ 0.05$$
$$D_{31}=-0.10, \quad D_{32}=\ \ 0.05, \quad D_{33}=\ \ 0.15$$

である．この問題の最適解は，(10) より

$$y_1^*=\frac{D_{11}b_1-D_{21}b_2+D_{31}b_3}{D}=30$$
$$y_2^*=\frac{-D_{12}b_1+D_{22}b_2-D_{32}b_3}{D}=55$$
$$y_3^*=\frac{D_{13}b_1-D_{23}b_2+D_{33}b_3}{D}=75$$

であり，生産物の価値額の最大値は，

$$z^*=p_1y_1^*+p_2y_2^*+p_3y_3^*=1{,}430$$

となる．

1 番目の生産要素の賦存量が増加したときの生産物の価値額を最大にする問題は，

$$z=8y_1+8y_2+10y_3$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$0.4y_1+0.1y_2+0.3y_3 \leqq 40+10$$
$$0.1y_1+0.4y_2+0.2y_3 \leqq 40$$
$$0.3y_1+0.2y_2+0.4y_3 \leqq 50$$
$$y_j \geqq 0 \quad (j=1, 2, 3)$$

と表せる．1 番目の生産要素が増加する前の最適解 y_j^* からの変化量として，増加後の最適解 $y_j^*+\Delta y_j^*$ は，(10) より

$$y_1^*+\Delta y_1^*=\frac{D_{11}(b_1+\Delta b_1)-D_{21}b_2+D_{31}b_3}{D}=90$$
$$y_2^*+\Delta y_2^*=\frac{-D_{12}(b_1+\Delta b_1)+D_{22}b_2-D_{32}b_3}{D}=65$$
$$y_3^*+\Delta y_3^*=\frac{D_{13}(b_1+\Delta b_1)-D_{23}b_2+D_{33}b_3}{D}=25$$
$$z^*+\Delta z^*=p_1(y_1^*+\Delta y_1^*)+p_2(y_2^*+\Delta y_2^*)+p_3(y_3^*+\Delta y_3^*)=1{,}490$$

となる．これらより

$$\Delta y_1^* = \frac{D_{11}}{D}\Delta b_1 = 60,\ \Delta y_2^* = -\frac{D_{12}}{D}\Delta b_1 = 10,\ \Delta y_3^* = \frac{D_{13}}{D}\Delta b_1 = -50$$

$$\Delta z^* = p_1\Delta y_1^* + p_2\Delta y_2^* + p_3\Delta y_3^* = 60$$

をえる．したがって，

$$\frac{\Delta y_1^*}{y_1^*} = \frac{60}{30} > \frac{\Delta b_1}{b_1} = \frac{10}{40} > \frac{\Delta y_2^*}{y_2^*} = \frac{10}{55}$$

$$> \frac{\Delta z^*}{z^*} = \frac{60}{1{,}430} > \frac{\Delta y_3^*}{y_3^*} = -\frac{50}{75}$$

が成立する．これより１番目の生産要素の増加によって１番目と２番目の財の生産量は増加し，３番目の財の生産量は減少する（Rybczynski 定理）．１番目の財の増加率は生産要素の増加率よりも大きく（拡張効果），さらに生産物の価値額は増加するけれども，その増加率は生産要素の増加率よりも小さい．

各生産要素のシャドー・プライスは，(11) より

$$w_1^* = 6,\ w_2^* = 11,\ w_3^* = 15$$

であり，(19) よりこれらは１番目の生産要素の賦存量が増加しても不変である．また，生産要素が増加する前の生産物の価値額とシャドー・プライスによる生産要素の賦存量の評価額は，1,430 で等しく，生産要素の賦存量が増加した後の生産物の価値額とシャドー・プライスによる増加した要素賦存量の評価額も 1,490 で等しい．

例題２．すべての生産係数を例題１と同じであるとし，要素賦存量と生産物価格の各々を

$$b_1 = 40,\ b_2 = 20,\ b_3 = 40$$

$$p_1 = 40,\ p_2 = 40,\ p_3 = 50$$

とし，１番目の要素賦存量の増加を

$$\Delta b_1 = 8$$

とする．

これらより生産物の価値額を最大にする問題は，

$$z = 40y_1 + 40y_2 + 50y_3$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$0.4y_1 + 0.1y_2 + 0.3y_3 \leqq 40$$

$$0.1y_1 + 0.4y_2 + 0.2y_3 \leqq 20$$

$$0.3y_1 + 0.2y_2 + 0.4y_3 \leqq 40$$

$$y_j \geqq 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

と表せる．この問題の最適解と目的関数の最大値は，(10) より

$$y_1^* = 60,\ y_2^* = 10,\ y_3^* = 50,\ z^* = 5{,}300$$

となる．

１番目の生産要素の賦存量が増加したときの生産物の価値額を最大にする問題は，

$$z = 40y_1 + 40y_2 + 50y_3$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$0.4y_1+0.1y_2+0.3y_3 \leqq 40+8$$
$$0.1y_1+0.4y_2+0.2y_3 \leqq 20$$
$$0.3y_1+0.2y_2+0.4y_3 \leqq 40$$
$$y_j^* \geqq 0 \quad (j=1, 2, 3)$$

となる．この問題の最適解を生産要素が増加する前の最適解 y_j^* からの変化量として $y_j^*+\Delta y_j^*$，目的関数の最大値を生産要素が増加する前の最大値からの変化量として $z^*+\Delta z^*$ と表すと，

$$y_1^*+\Delta y_1^*=108,\ y_2^*+\Delta y_2^*=18,\ y_3^*+\Delta y_3^*=10,\ z^*+\Delta z^*=5{,}540$$

となるので，生産要素の増加による変化量は，各々

$$\Delta y_1^*=48,\ \Delta y_2^*=8,\ \Delta y_3^*=-40,\ \Delta z^*=240$$

である．これらより

$$\frac{\Delta y_1^*}{y_1^*}=\frac{\Delta y_2^*}{y_2^*}=\frac{48}{60}>\frac{\Delta b_1}{b_1}=\frac{8}{40}$$
$$>\frac{\Delta z^*}{z^*}=\frac{240}{5{,}300}>\frac{\Delta y_3^*}{y_3^*}=-\frac{40}{50}$$

という関係が成立している．この場合，１番目の生産要素の増加によって１番目と２番目の財の生産量は増加し，３番目の財の生産量は減少する（Rybczynski 定理）．１番目と２番目の財の増加率は等しく，ともに生産要素の増加率より大きく（拡張効果），生産物の価値額は増加するけれども，生産要素の増加率よりは小さい．

生産要素のシャドー・プライスは，(11) より

$$w_1^*=30,\ w_2^*=55,\ w_3^*=75$$

であり，これらは１番目の要素賦存量の増加前後で不変である．経済全体の生産物の価値額とシャドー・プライスによる生産要素の評価額は，生産要素が増加する前には 5,300 で互いに等しく，生産要素が増加した後では 5,540 でやはり互いに等しい．

参考文献

［１］Batra, R. N., *Studies in the Pure Theory of International Trade*. London : Macmillan, 1973.

［２］Chacholiades, M., *International Trade Theory and Policy*. New York : McGraw-Hill Book Co., 1978.

［３］Gandolfo, G., *International Economics I : The Pure Theory of International Trade*. New York : Springer-Verlag, 1987.

［４］Jones, R. W., “The Structure of Simple General Equilibrium Models,” *Journal of Political Economy*, Vol. 73 (1965), pp. 557–572. Reprinted in Jones, R. W., *International Trade : Essays in Theory*. Amsterdam : North-Holland, 1979, pp. 57–78.

［５］Jones, R. W., “Duality in International Trade : A Geometrical Note,” *Canadian Journal of Economics and Political Science*, Vol. 31 (1965), pp. 390–393. Reprinted in Jones, R. W., *International Trade : Essays in Theory*. Amsterdam : North-Holland, 1979, pp. 79–83.

［６］Kemp, M. C., *The Pure Theory of International Trade and Investment*. Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall, 1969.

［７］Kenen, P. B., *The International Economy*. Third Ed., Cambridge : Cambridge University Press, 1994.

［８］Krauss, M. B., and Johnson, H. G., *General Equilibrium Analysis : A Microeconomic Text*. London : George Allen & Unwin, 1974.

［９］尾崎雄一郎，「Rybczynski 定理の幾何学的考察」，『名城論叢』，Vol. 6, No. 2（2005 年），pp. 1–9.
［10］Rybczynski, T. M., “Factor Endowment and Relative Commodity Prices,” *Economica*, Vol. 22（1955）, pp. 336–341. Reprinted in Caves, R. E., and Johnson, H. G.（eds.）, *Readings in International Economics*. Homewood, Ill. : Richard D. Irwin, 1968, pp. 72–77.
［11］Silberberg, E., *The Structure of Economics : A Mathematical Analysis*. Second Ed., New York : McGraw-Hill Book Co., 1990.
［12］Södersten, B., *International Economics*. London : Macmillan, 1970.
［13］Takayama, A., *International Trade : An Approach to the Theory*. New York : Holt, Rinehart and Winston, 1972.
［14］Woodland, A. D., *International Trade and Resource Allocation*. Amsterdam : North-Holland, 1982.