リニアー・プログラミングの２人ゼロ和ゲームへの変換とそれに関連する定理

尾　崎　雄一郎

１．はじめに

２人ゼロ和ゲームの問題はリニアー・プログラミングの問題に変換して解くことができ，[1] 逆にリニアー・プログラミングの問題は主問題とその双対問題を一まとめにして２人ゼロ和ゲームの問題に変換できる．[2] ２人ゼロ和ゲームにおいてゲームの値と２人のプレイヤーの最適戦略は有界である．しかし，リニアー・プログラミングの問題には最適解が存在することも，存在しないこともあり，また最適解における変数の幾つかが有界であることも，有界でないこともある．リニアー・プログラミングの主問題とその双対問題に関して(i)各々の問題に最適解が存在し，これらの問題のすべての変数が有界である，(ii)各々の問題に最適解が存在するけれども，幾つかの変数は有界ではない，(iii)いずれかの問題に実行可能解が存在するけれども，その目的関数の値が有界ではなく，他方の問題には実行可能解が存在しない，(iv)両方の問題に実行可能解が存在しない，という４つの場合に分けることができる．

２人ゼロ和ゲームの問題をリニアー・プログラミングの問題に変換して解くときには何の問題も生せず，しかもこのように変換して解くのが一般に最も効率的である．しかし，必ずしも最適解が存在せず，また最適解が存在したとしても最適な変数が必ずしも有界ではないリニアー・プログラミングの問題を必ず最適解が存在し，最適解も必ず有界である２人ゼロ和ゲームの問題に変換して解くときには，ゲームの問題として解いた最適解がリニアー・プログラミングの問題の今述べた４つの場合のいずれに該当するか判断する基準が必要になる．

リニアー・プログラミングの問題を変換した２人ゼロ和ゲームの最適解に関して(i)が成立するための必要十分条件は多くの文献において明らかにされている．[3] また，(i)が成立するための条件に言及しているものの証明がなかったり，数値例だけで示しているものもある．[4] Goldman and

---

1　Bennion [1], pp. 101–108, Dantzig [2], [3], pp. 286–290, Dorfman, Samuelson, and Solow [4], pp. 446–453, Gale [5], pp. 216–218, Gale, Kuhn, and Tucker [6], Gass [7], pp. 406–416, Hadley [9], pp. 415–417, Krekó [11], pp. 276–279, Luce and Raiffa [12], pp. 408–412, Vorob'ev [13], pp. 50–51 など.

2　Bennion [1], pp. 108–113, 114–125, Dantzig [2], [3], pp. 288–291, Dorfman, Samuelson, and Solow [4], pp. 453–464, Gale [5], pp. 218–220, Gale, Kuhn, and Tucker [6], Gass [7], pp. 416–417, Goldman and Tucker [8], pp. 74–75, Hadley [9], pp. 418–419, Karlin [10], pp. 124–126, Krekó [11], pp. 279–281, Luce and Raiffa [12], pp. 419–423, Vorob'ev [13], pp. 51–55 など.

3　Dantzig [3], pp. 290–291, Gale [5], pp. 218–220, Gale, Kuhn, and Tucker [6], Goldman and Tucker [8], Hadley [9], pp. 418–419, Karlin [10], pp. 124–126, Krekó [11], pp. 279–281, Luce and Raiffa [12], pp. 419–423, Vorob'ev [13], pp. 51–55 など.

4　Bennion [1], pp. 114–119, Dorfman, Samuelson, and Solow [4], pp. 453–458, Gass [7], pp. 416–417 など.

Tucker [8] は (iii) と (iv) が成立するための十分条件を，Luce and Raiffa [12][5] と Vorob'ev [13][6] は (iii) が成立するための十分条件を証明している．Bennion [1][7] は (ii) と (iii) が成立するための条件を数値例で，Dorfman, Samuelson, and Solow [4][8] は (ii) が成立するための条件をやはり数値例で示している．

しかし，リニアー・プログラミングの主問題とその双対問題の解とこれらの問題を変換した２人ゼロ和ゲームの解との関連は完全には解明されていない．本論文においてリニアー・プログラミングの解と変換された２人ゼロ和ゲームの解の関連を示す (i) から (iv) までのすべての場合の必要十分条件を証明する．特に，(ii) と (iii) の場合については主問題と双対問題いずれに関してそれが生じるか明らかにする必要十分条件を与え，証明する．

２．リニアー・プログラミングにおける双対定理

任意に与えられた行列を $A=(a_{ij})\in R^m\times R^n$，列ベクトルを $b=(b_i)\in R^m$，$c=(c_j)\in R^n$ とし，２つのベクトル $x=(x_j)$，$q=(q_j)$ の大小比較を

すべての j について $x_j \geqq q_j$ であるとき，$x\geqq q$

$x\geqq q$ であって，$x\neq q$ であるとき，　$x\geq q$

すべての j について $x_j > q_j$ であるとき，$x > q$

と表し，行列やベクトルに付けた $'$ は転置を表す．

以下において

(1) $$c'x$$

を次の制約条件の下で最大にする

(2) $$Ax\leqq b,\ \ x\geqq 0$$

という一般的なリニアー・プログラミングの主問題と，

(3) $$b'y$$

を次の制約条件の下で最小にする

(4) $$A'y\geqq c,\ \ y\geqq 0$$

という双対問題について考察する．これら一対のリニアー・プログラミングの問題に関して次に述べる双対定理を後の証明に利用する．

定理Ⅰ．[9] 主問題 (1)-(2) と双対問題 (3)-(4) に最適解が存在するための必要十分条件は両方の問題に実行可能解が存在することである．

5　同書，pp. 419-423.

6　同書，pp. 53-55.

7　同書，pp. 119-125.

8　同書，pp. 458-459.

9　Dantzig [3], p. 129, Gale [5], pp. 12, 78-82, Gass [7], p. 162, Goldman and Tucker [8], p. 61, Karlin [10], p. 123, Krekó [11], pp. 194-195 など．

定理Ⅱ. [10] 主問題(1)-(2)あるいは双対問題(3)-(4)のいずれかに最適解が存在するならば，他方の問題にも最適解が存在し，各々の最適解に対する２つの目的関数の値は等しい.

定理Ⅲ. [11] 主問題(1)-(2)と双対問題(3)-(4)の各々に実行可能解が存在し，これらの実行可能解に対する各々の目的関数の値が等しいならば，これらの実行可能解は各々の問題の最適解である.

定理Ⅳ. [12] 主問題(双対問題)の目的関数の値が上に(下に)有界でないための必要十分条件は，主問題(双対問題)に実行可能解が存在し，双対問題(主問題)に実行可能解が存在しないことである.

３．線型不等式とリニアー・プログラミングに関する基礎的な定理

すべての要素が１である m 次元列ベクトルを e，i 番目の要素が１で，他のすべての要素がゼロである m 次元単位列ベクトルを $e(i)$，同様に j 番目の要素が１である n 次元単位列ベクトルを $e(j)$ と表し，後の定理に必要な基礎的な定理を本節で示す.

定理１. [13] 次の２つの命題

(5) $$Ax \leqq b,\ \ x \geqq 0 \text{ が解 } x \text{ をもつ}$$

と

(6) $$A'y \geqq 0,\ \ b'y < 0,\ \ y \geqq 0 \text{ が解 } y \text{ をもつ}$$

のうちいずれか１つが成立し，両方が成立することはない.

証明.　最初に，

(7) $$e'z$$

を次の制約条件の下で最小にする

(8) $$-Ax + z \geqq -b,\ \ x \geqq 0,\ \ z \geqq 0$$

というリニアー・プログラミングの主問題と，

(9) $$-b'y$$

を次の制約条件の下で最大にする

(10) $$-A'y \leqq 0,\ \ y \leqq e,\ \ y \geqq 0$$

という双対問題を考える.(8)において任意の非負の x に対して z を十分に大きくとれば，これらの x と z はその実行可能解であり，また(10)において $y = 0$ はその実行可能解である.これらの主問題と双対問題の各々に実行可能解が存在するので，定理Ⅰより各々の問題に最適解が存在する.

ここで，(5)が解をもたないと仮定すると，任意の $x \geqq 0$ に対して $-Ax \ngeqq -b$ でなければならず，

10　Gass [7], pp. 158-161, Hadley [9], pp. 229-230, Krekó [11], pp. 193-194 など.

11　Gale [5], pp. 10-11, Goldman and Tucker [8], pp. 57, 60-61, Hadley [9], p. 228, Karlin [10], pp. 123-124, Krekó [11], p. 193 など.

12　Dantzig [3], p. 129, Gass [7], pp. 158, 161-162, Hadley [9], pp. 241-242 など.

13　Gale [5], pp. 47-48 による.

(8) の実行可能解はすべて $z \geqq 0$ でなければならない．これより主問題 (7)-(8) の最適な z^* は $z^* \geqq 0$ であり，目的関数 (7) の最小値は $e'z^* > 0$ となる．したがって，定理Ⅱより双対問題 (9)-(10) に $-b'y^* = e'z^* > 0$，$-A'y^* \leqq 0$，$y^* \geqq 0$ である最適解が存在する．これより (6) が解 y^* をもつ．

逆に，(5) が解 x^* をもつと仮定する．このとき，$z^* = 0$ とすると，x^* と z^* は主問題 (7)-(8) の最適解である．よって，定理Ⅱより双対問題 (9)-(10) に最適解 y^* が存在し，$-b'y^* = e'z^* = 0$ が成立する．このとき，$-A'y \leqq 0$，$y \leqq e$，$y \geqq 0$ である (10) のすべての実行可能解 y に対して $-b'y \leqq -b'y^* = 0$ が成立する．(10) から $y \leqq e$ という条件を取り除き，任意の正数倍した y を用いると，$A'y \geqq 0$，$y \geqq 0$，$b'y \geqq 0$ が成立し，(6) は解をもたない．□

定理2．[14] リニアー・プログラミングの主問題 (1)-(2) に最適解 x^* が存在するものとする．このとき，最適解 $x^* = (x_j^*)$ の j 番目の変数 x_j^* が有界でないための必要十分条件は，

(11)
$$Aq \leqq 0,\ \ c'q = 0,\ \ q \geqq e(j)$$

を満たす $q \in R^n$ が存在することである．

証明． 最初に，制約条件 (2) の下での目的関数 (1) の最大値を f^* とし，

(12)
$$e(j)'x$$

を次の制約条件の下で最大にする

(13)
$$Ax \leqq b,\ \ c'x \leqq f^*,\ \ -c'x \leqq -f^*,\ \ x \geqq 0$$

というリニアー・プログラミングの問題を考える．容易に分かるように，主問題 (1)-(2) のすべての最適解は (13) の実行可能解であり，(13) のすべての実行可能解は主問題 (1)-(2) の最適解である．主問題 (12)-(13) に対する双対問題は，

(14)
$$b'y + f^*r - f^*s$$

を次の制約条件の下で最小にする

(15)
$$A'y + cr - cs \geqq e(j),\ \ y \geqq 0,\ \ r \geqq 0,\ \ s \geqq 0$$

と表せる．ここで，r と s はスカラーの変数である．

（十分性） (11) を満たす解が存在すると仮定すると，

(16)
$$\begin{bmatrix} -A \\ -c' \\ c' \end{bmatrix} q \geqq 0,\ \ -e(j)'q < 0,\ \ q \geqq 0$$

は解 q をもつ．すると，定理1より

(17)
$$(-A', -c, c)\begin{bmatrix} y \\ r \\ s \end{bmatrix} \leqq -e(j),\ \ \begin{bmatrix} y \\ r \\ s \end{bmatrix} \geqq 0$$

は解をもたない．ゆえに，(17) と同値の制約条件 (15) に実行可能解が存在しない．また，仮定により主問題 (1)-(2) に最適解が存在するから，制約条件 (13) に実行可能解が存在する．以上より主問題 (12)-(13) に実行可能解が存在するけれども，その双対問題 (14)-(15) には実行可能解が存在しない．したがって，定理Ⅳより主問題の目的関数 (12) の値 $e(j)'x^* = x_j^*$ は上に有界ではなく，無限に

14　Williams［14］による．

大きくできる．

（必要性）　主問題(1)-(2)に最適解 $x^*=(x_j^*)$ が存在し，その j 番目の変数 x_j^* が有界ではないと仮定する．すると，主問題(12)-(13)に実行可能解が存在し，目的関数(12)の値を無限に大きくできる．したがって，定理Ⅳより双対問題の制約条件(15)に実行可能解が存在しない．これより(17)は解をもたない．すると，定理１より(16)は解 q をもち，(11)を満たす解が存在する．　□

定理３．　リニアー・プログラミングの双対問題(3)-(4)に最適解 y^* が存在するものとする．このとき，最適解 $y^*=(y_i^*)$ の i 番目の変数 y_i^* が有界でないための必要十分条件は，

(18) $$A'p \geqq 0,\ \ b'p=0,\ \ p \geqq e(i)$$

を満たす $p \in R^m$ が存在することである．

証明．　最小化の双対問題(3)-(4)を

$$-b'y$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$-A'y \leqq -c,\ \ y \geqq 0$$

という最大化問題に書き変える．この最大化問題の最適解の i 番目の変数 y_i^* が有界でないための必要十分条件は，この最大化問題に定理２の条件(11)を適用すると，

$$-A'p \leqq 0,\ \ -b'p=0,\ \ p \geqq e(i)$$

と表せる．これは(18)と同値である．したがって，定理２の場合と同様に証明できる．　□

４．２人ゼロ和ゲームに関する基礎的な定理

よく知られているように，[15] リニアー・プログラミングの主問題(1)-(2)とその双対問題(3)-(4)を一まとめにした２人ゼロ和ゲームの利得行列は，

(19) $$M=\begin{bmatrix} 0 & A & -b \\ -A' & 0 & c \\ b' & -c' & 0 \end{bmatrix}$$

と表せる．(19)の $(m+n+1)\times(n+m+1)$ 行列 M は歪対称行列で，

(20) $$M=-M'$$

という性質をもつ．

利得行列(19)に対する最大化プレイヤーの最適戦略 x とゲームの値 v は，

(21) $$v$$

を次の制約条件の下で最大にする

(22) $$M'x \geqq ve,\ \ e'x=1,\ \ x \geqq 0$$

というリニアー・プログラミングの問題の最適解としてえられる．ここで，x は $m+n+1$ 次元列ベクトル，v はスカラーで符号の制約がない変数である．最小化プレイヤーの最適戦略 y とゲームの値 w は，

15　注２の文献を参照のこと．

(23)
$$w$$
を次の制約条件の下で最小にする
(24)
$$My \leqq we,\ \ e'y = 1,\ \ y \geqq 0$$
という双対問題の最適解としてえられる．やはり，y は $m+n+1$ 次元列ベクトル，w はスカラーで符号の制約がない変数である．

定理４． 任意の歪対称行列 M に対する主問題 (21)–(22) の最適解を x^*, v^*, 双対問題 (23)–(24) の最適解を y^*, w^* とすると，
(25)
$$v^* = w^* = 0,\ \ x^* = y^*$$
が成立する．

証明． $e'x = 1$，$x \geqq 0$ である任意の x に対して v の値を十分小さくとれば，これらは (22) の実行可能解である．また，$e'y = 1$，$y \geqq 0$ である任意の y に対して w の値を十分大きくとれば，これらは (24) の実行可能解である．主問題と双対問題の各々に実行可能解が存在するから，定理Ⅰより主問題と双対問題の各々に最適解が存在し，定理Ⅱより
(26)
$$v^* = w^*$$
が成立する．M が (20) を満たすことに注意すると，
$$x'Mx = (x'Mx)' = x'M'x = -x'Mx$$
であるから，任意の x に対して
(27)
$$x'Mx = x'M'x = 0$$
が成立する．最適解に対する (22) の最初の不等式に前から非負の x^* を掛け，２番目の式を用いると，
(28)
$$x^{*\prime}M'x^* \geqq v^*$$
となり，同様に最適解に対する (24) の不等式に前から非負の y^* を掛け，２番目の式を用いると，
(29)
$$y^{*\prime}My^* \leqq w^*$$
となる．(26) から (29) までの式を用いると，
$$0 = y^{*\prime}My^* \leqq w^* = v^* \leqq x^{*\prime}M'x^* = 0$$
という一連の式をえる．ゆえに，これらの不等号はすべて等号で成立しなければならない．したがって，(25) の最初の式と
$$y^{*\prime}My^* = x^{*\prime}M'x^*$$
をえる．これに (27) を用いると，
$$y^{*\prime}My^* = x^{*\prime}Mx^*$$
が成立する．これより (25) の２番目の式が成立する x^* と y^* が存在する．　□

５．リニアー・プログラミングと２人ゼロ和ゲームの関連を示す基礎的な定理

本節で，リニアー・プログラミングの主問題 (1)–(2) とその双対問題 (3)–(4) の解に関する先の (i) から (iv) の場合と，(19) を利得行列とする２人ゼロ和ゲームの最適解との関連を明らかにする．

(19) を利得行列とする２人ゼロ和ゲームは，リニアー・プログラミングの主問題 (21)-(22) とその双対問題 (23)-(24) によって表され，定理４よりこれらの問題のゲームの値はゼロで，双方のプレイヤーに同じ最適戦略が存在する．したがって，(22) より

(30) $$M'x \geqq 0,\ \ x \geqq 0$$

に解が存在し，また (24) より

(31) $$Mx \leqq 0,\ \ x \geqq 0$$

に解が存在する．(20) に注意すると，(30) と (31) は同一の式である．いま，

$$x = y = \begin{bmatrix} p \\ q \\ t \end{bmatrix},\ \ p \in R^m,\ q \in R^n,\ t \in R$$

とし，(19) を用い，$e'x = 1$ に注意すると，(31) は

$$Mx = \begin{bmatrix} 0 & A & -b \\ -A' & 0 & c \\ b' & -c' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ t \end{bmatrix} \leqq 0,\ \ \begin{bmatrix} p \\ q \\ t \end{bmatrix} \geqq 0$$

と表せる．これより

(32) $$Aq \leqq bt,\ \ A'p \geqq ct,\ \ b'p \leqq c'q,\ \ (p', q', t)' \geqq 0$$

に解が存在する．

定理５．　リニアー・プログラミングの主問題 (1)-(2) とその双対問題 (3)-(4) に最適解が存在するための必要十分条件は，(32) に

(33) $$t^* > 0$$

である解 (p^*, q^*, t^*) が存在することである．

証明．　（必要性）　主問題に最適解 x^* が，双対問題に最適解 y^* が存在すると仮定する．すると，定理Ⅱより

$$Ax^* \leqq b,\ \ A'y^* \geqq c,\ \ c'x^* = b'y^*,\ \ x^* \geqq 0,\ \ y^* \geqq 0$$

が成立する．これらの式の両辺に任意の正数 t^* を掛け，$q^* = t^*x^*$, $p^* = t^*y^*$ と定めると，これらより (32) が $t^* > 0$ に対して成立する．

（十分性）　(32) に (33) を満たす解 (p^*, q^*, t^*) が存在すると仮定する．(32) の各式を t^* で割り，$x^* = q^*/t^*$, $y^* = p^*/t^*$ と定めると，

(34) $$Ax^* \leqq b,\ \ A'y^* \geqq c,\ \ b'y^* \leqq c'x^*,\ \ x^* \geqq 0,\ \ y^* \geqq 0$$

をえる．(34) における x^* と y^* は主問題 (1)-(2) と双対問題 (3)-(4) の実行可能解である．(34) の最初の不等式に前から非負の y^* を，２番目の不等式に前から非負の x^* を掛け，３番目の不等式を用いると，

$$y^{*\prime}Ax^* \leqq b'y^* \leqq c'x^* \leqq x^{*\prime}A'y^*$$

となる．ここで，$y^{*\prime}Ax^* = x^{*\prime}A'y^*$ であるから，上式の不等号はすべて等号で成立し，

$$c'x^* = b'y^*$$

をえる．(34) とこの式より主問題 (1)-(2) と双対問題 (3)-(4) 各々の実行可能解に対する各々の目的

関数の値が等しいので，定理Ⅲより主問題に最適解 x^* が，双対問題に最適解 y^* が存在する．　□

定理６． リニアー・プログラミングの主問題(1)-(2)に最適解が存在し，主問題の最適解におけるある変数が有界でないための必要十分条件は，(32)に

(35) $$t^* > 0$$

である解 (p^*, q^*, t^*) と

(36) $$p^{**} = 0,\ \ t^{**} = 0$$

である解 (p^{**}, q^{**}, t^{**}) が存在することである．

証明．（十分性） 定理５より(32)に(35)を満たす解が存在するならば，主問題(1)-(2)と双対問題(3)-(4)に最適解が存在する．次に，(32)に(36)を満たす解が存在するならば，

(37) $$Aq^{**} \leqq 0,\ \ c'q^{**} \geqq b'p^{**} = 0,\ \ q^{**} \geq 0$$

が成立する．(35)を満たす解 (p^*, q^*, t^*) に対して成立する(32)の２番目の不等式に前から非負の q^{**} を掛け，(37)の最初の不等式に注意すると，

$$q^{**\prime}c \leqq q^{**\prime}A'p^*/t^* = p^{*\prime}Aq^{**}/t^* \leqq 0$$

が成立する．これと(37)の２番目の式より

(38) $$c'q^{**} = b'p^{**} = 0$$

をえる．(37)と(38)より

$$Aq^{**} \leqq 0,\ \ c'q^{**} = 0,\ \ q^{**} \geq e(j)$$

を満たす q^{**} が存在するから，定理２の(11)が成立する．したがって，主問題(1)-(2)の最適解におけるある変数の値を無限に大きくできる．

（必要性） 主問題(1)-(2)に最適解が存在し，その最適解におけるある変数が有界ではないと仮定する．主問題に最適解が存在するならば，定理Ⅱより双対問題(3)-(4)にも最適解が存在し，定理５より(32)に(35)を満たす解が存在する．また，主問題の最適解におけるある変数が有界でないので，定理２より

(39) $$Aq^{**} \leqq 0,\ \ c'q^{**} = 0,\ \ q^{**} \geq e(j)$$

である q^{**} が存在する．いま，$p^{**} = 0$，$t^{**} = 0$ と定めると，(39)を考慮して(38)が成立し，(32)に(36)を満たす解も存在する．　□

定理７． リニアー・プログラミングの双対問題(3)-(4)に最適解が存在し，双対問題におけるある変数が有界でないための必要十分条件は，(32)に

(40) $$t^* > 0$$

である解 (p^*, q^*, t^*) と

(41) $$q^{**} = 0,\ \ t^{**} = 0$$

である解 (p^{**}, q^{**}, t^{**}) が存在することである．

証明．（十分性） 定理５より(32)に(40)を満たす解が存在するならば，主問題(1)-(2)と双対問題(3)-(4)に最適解が存在する．また，(32)に(41)を満たす解が存在するならば，

(42) $$A'p^{**} \geqq 0,\ \ b'p^{**} \leqq c'q^{**} = 0,\ \ p^{**} \geq 0$$

が成立する．(40) を満たす解 (p^*, q^*, t^*) に対して成立する (32) の最初の不等式に前から非負の p^{**} を掛けると，

$$p^{**\prime}Aq^*/t^* = q^{*\prime}A'p^{**}/t^* \leqq p^{**\prime}b$$

となり，(32) より $q^* \geqq 0$，(42) より $A'p^{**} \geqq 0$ であるから，上の不等式は

$$0 \leqq q^{*\prime}A'p^{**} \leqq p^{**\prime}b$$

となる．これと (42) の２番目の式より

(43)
$$b'p^{**} = c'q^{**} = 0$$

をえる．(42) と (43) より

$$A'p^{**} \geqq 0,\ b'p^{**} = 0,\ p^{**} \geqq e(i)$$

を満たす p^{**} が存在する．したがって，定理３より双対問題の最適解におけるある変数は有界ではない．

（必要性）　双対問題 (3)－(4) に最適解が存在し，その最適解におけるある変数が有界ではないと仮定する．双対問題に最適解が存在するので，定理Ⅱより主問題 (1)－(2) にも最適解が存在し，定理５より (40) を満たす解 (p^*, q^*, t^*) が存在する．双対問題の最適解のある変数が有界ではないので，定理３より

(44)
$$A'p^{**} \geqq 0,\ b'p^{**} = 0,\ p^{**} \geqq e(i)$$

である p^{**} が存在する．このとき，$q^{**} = 0$，$t^{**} = 0$ と定めると，(44) を考慮して (43) が成立するし，(32) に (41) を満たす解が存在する．　□

定理８． リニアー・プログラミングの主問題 (1)－(2) に実行可能解が存在するけれども，最適解は存在せず，その目的関数の値が上に有界でないための必要十分条件は，(32) に

(45)
$$p^* = 0,\ c'q^* > 0,\ t^* = 0$$

である解 (p^*, q^*, t^*) が存在し，

(46)
$$A'\hat{p} \geqq 0,\quad b'\hat{p} < 0,\quad \hat{p} \geqq 0$$

となる解 $(\hat{p}, \hat{q}, \hat{t})$ が存在しないことである．

証明．（必要性）　主問題の制約条件 (2) に実行可能解が存在し，目的関数 (1) の値を無限に大きくできるものと仮定する．このとき，定理Ⅳより双対問題の制約条件 (4) に実行可能解が存在しない，すなわち

(47)
$$-A'y \leqq -c,\ y \geqq 0$$

が解 y をもたない．これに定理１を適用すると，

(48)
$$Aq^* \leqq 0,\ c'q^* > 0,\ q^* \geqq 0$$

が解 q^* をもつ．ここで，$p^* = 0$，$t^* = 0$ と定めると，これらの p^*, q^*, t^* は (48) より (45) を満たし，(32) の解である．さらに，制約条件 (2) に実行可能解が存在する，すなわち

$$Ax \leqq b,\ x \geqq 0$$

が解 x をもつから，これに再び定理１を適用すると，(46) は解をもたない．

（十分性）　(32) に (45) を満たす解が存在し，(46) を満たす解は存在しないと仮定する．(46) を満たす解が存在しないならば，定理１より主問題の制約条件 (2) に実行可能解が存在する．また，(32)

に (45) を満たす解が存在するならば，(48) が解 q^* をもつ．(48) が解をもつならば，定理１より (47) すなわち双対問題の制約条件 (4) に実行可能解が存在しない．主問題の制約条件に実行可能解が存在し，その双対問題の制約条件に実行可能解が存在しないから，定理Ⅳより主問題の目的関数 (1) の値を無限に大きくできる．□

定理９．　リニアー・プログラミングの双対問題 (3)－(4) に実行可能解が存在するけれども，最適解は存在せず，その目的関数の値が下に有界でないための必要十分条件は，(32) に

(49)
$$q^* = 0,\ \ b'p^* < 0,\ \ t^* = 0$$

である解 (p^*, q^*, t^*) が存在し，

(50)
$$A\hat{q} \leqq 0,\quad c'\hat{q} > 0,\ \ \hat{q} \geqq 0$$

である解 $(\hat{p}, \hat{q}, \hat{t})$ が存在しないことである．

証明．　（必要性）　双対問題の制約条件 (4) に実行可能解が存在し，目的関数 (3) の値を無限に小さくできるものとする．すると，定理Ⅳより主問題の制約条件 (2) に実行可能解が存在しない．この事実に定理１を適用すると，

(51)
$$A'p^* \geqq 0,\ \ b'p^* < 0,\ \ p^* \geqq 0$$

は解 p^* をもつ．このとき，$q^* = 0$，$t^* = 0$ と定めると，(51) よりこれらの p^*, q^*, t^* は (49) を満たし，(32) の解である．また，制約条件 (4) に実行可能解が存在する，すなわち定理８の (47) が解 y をもつから，定理１より (48) すなわち (50) を満たす解は存在しない．

（十分性）　(32) に (49) を満たす解が存在し，(50) を満たす解が存在しないと仮定する．(50) を満たす解，すなわち

$$-A\hat{q} \geqq 0,\ \ -c'\hat{q} < 0,\ \ \hat{q} \geqq 0$$

を満たす解が存在しないならば，定理１より

$$-A'y \leqq -c,\ \ y \geqq 0$$

すなわち双対問題の制約条件 (4) に実行可能解が存在する．また，(32) に (49) を満たす解が存在するならば，(51) が解 p^* をもつ．(51) が解をもつならば，定理１より主問題の制約条件 (2) に実行可能解が存在しない．以上より主問題に実行可能解が存在せず，双対問題に実行可能解が存在するから，定理Ⅳより双対問題の目的関数の値を無限に小さくできる．□

定理 10．　リニアー・プログラミングの主問題 (1)－(2) と双対問題 (3)－(4) の両方に実行可能解が存在しないための必要十分条件は，(32) に

(52)
$$q^* = 0,\quad b'p^* < 0,\ \ t^* = 0$$

である解 (p^*, q^*, t^*) と，

(53)
$$p^{**} = 0,\ \ c'q^{**} > 0,\ \ t^{**} = 0$$

である解 (p^{**}, q^{**}, t^{**}) が存在することである．

証明．　（必要性）　制約条件 (2) と (4) に実行可能解が存在しないと仮定する．(2) に実行可能解が存在しない，すなわち $Ax \leqq b$，$x \geqq 0$ に解が存在しないから，定理１より

(54)
$$A'p^* \geqq 0,\ \ b'p^* < 0,\ \ p^* \geqq 0$$

が解 p^* をもつ．このとき，$q^*=0$，$t^*=0$ と定め，(54) に注意すると，これらの p^*，q^*，t^* は (52) を満たし，(32) の解である．さらに，(4) すなわち $-A'y \leqq -c$，$y \geqq 0$ に解が存在しないから，定理１より

$$-Aq^{**} \geqq 0,\quad -c'q^{**} < 0,\quad q^{**} \geqq 0$$

すなわち

(55) $$Aq^{**} \leqq 0,\qquad c'q^{**} > 0,\quad q^{**} \geqq 0$$

が解 q^{**} をもつ．このとき，$p^{**}=0$，$t^{**}=0$ と定めると，(55) とともにこれらの p^{**}，q^{**}，t^{**} は (53) を満たし，(32) の解である．

（十分性） (32) に (52) が成立する解が存在するならば，(54) は解 p^* をもつ．すると，定理１より制約条件 (2) に実行可能解が存在しない．また，(32) に (53) が成立する解が存在するならば，(55) は解 q^{**} をもつ．再び定理１より制約条件 (4) に実行可能解が存在しない．□

６．数値列

リニアー・プログラミングの主問題と双対問題の解とこれらの問題を変換した２人ゼロ和ゲームの解との関連を示す数値例を本節で取り上げる．

例題１． $$f=-x_1+x_2$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$-x_1+x_2 \leqq 1,\quad x_1 \geqq 0,\quad x_2 \geqq 0$$

という主問題と，

$$y$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$-y \geqq -1,\quad y \geqq 1,\quad y \geqq 0$$

という双対問題を考える．これらの問題の最適解と主問題の目的関数の最大値 f^* は，各々

$$x_1^*=\theta,\quad x_2^*=1+\theta\ (\theta \geqq 0),\quad y^*=1,\quad f^*=1$$

である．主問題の目的関数の最大値は１で有界であるが，２つの最適な変数 x_1^* と x_2^* の値は有界ではない．

これらの問題に対する２人ゼロ和ゲームの利得行列は，

$$M=\begin{bmatrix} 0 & A & -b \\ -A' & 0 & c \\ b' & -c' & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

となる．これより最小化プレイヤーの観点からの最適戦略とゲームの値 v（これらは定理４より最大化プレイヤーの最適戦略とゲームの値に等しい）はすべての戦略の賭目の和が１に等しいという正規化条件とともに，

$$v$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q_1 \\ q_2 \\ t \end{bmatrix} \leqq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

$$p+q_1+q_2+t=1,\ p \geqq 0,\ q_1 \geqq 0,\ q_2 \geqq 0,\ t \geqq 0$$

というリニアー・プログラミングの問題の最適解としてえられる（v には符号の制約がない）．この問題の最適解は多重解で，

$$p^*=1/3,\ q_1^*=0,\quad q_2^*=1/3,\quad t^*=1/3,\ v^*=0$$

と

$$p^{**}=0,\quad q_1^{**}=1/2,\ q_2^{**}=1/2,\ t^{**}=0,\quad v^{**}=0$$

である．これらから明らかなように，$t^*>0$ である最適解と，$t^{**}=0$，$p^{**}=0$ である最適解が存在するので，定理６より元のリニアー・プログラミングの主問題に最適解が存在し，主問題の最適解における幾つかの変数が有界ではないことが確認できる．

例題２．

$$f=x_1$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$-x_1+x_2 \leqq 1,\ x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$$

という主問題と，

$$y$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$-y \geqq 1,\ y \geqq 0$$

という双対問題を考える．この主問題には実行可能解が存在するけれども，双対問題には実行可能解が存在せず，したがって定理Ⅳより主問題の目的関数の値を無限に大きくできる．

このとき，主問題と双対問題に基づく最小化プレイヤーの観点からの最適戦略とゲームの値は，

$$v$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q_1 \\ q_2 \\ t \end{bmatrix} \leqq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

$$p+q_1+q_2+t=1,\ p \geqq 0,\ q_1 \geqq 0,\ q_2 \geqq 0,\ t \geqq 0$$

というリニアー・プログラミングの問題の最適解としてえられる．この問題の最適解は多重解で，

$$p^*=0,\ q_1^*=1,\quad q_2^*=0,\quad t^*=0,\ v^*=0$$

と

$$\hat{p}=0,\ \hat{q}_1=1/2,\ \hat{q}_2=1/2,\ \hat{t}=0,\quad \hat{v}=0$$

である．このとき，最初の最適解に対して

$$p^* = 0,\ c'q^* = (1 \quad 0)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 1 > 0,\ t^* = 0$$

であり，２番目の最適解に対して

$$A'\hat{p} = 0,\ b'\hat{p} = 1 \times 0 = 0,\ \hat{p} = 0$$

であるので，定理８の(45)を満たす解が存在するけれども，(46)を満たす解は存在しない．したがって，定理８より主問題に実行可能解が存在し，その目的関数の値を無限に大きくできることが確かめられる．

例題３．
$$f = x_1 + x_2$$
を次の制約条件の下で最大にする
$$-x_1 \leqq 1,\ x_2 \leqq -1,\ x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$$
という主問題と，
$$y_1 - y_2$$
を次の制約条件の下で最小にする
$$-y_1 \geqq 1,\ y_2 \geqq 1,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$$
という双対問題を考える．明らかに，これらの主問題と双対問題に実行可能解が存在しない．

このとき，主問題と双対問題に基づく最小化プレイヤーの最適戦略とゲームの値は，
$$v$$
を次の制約条件の下で最小にする
$$\begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\1 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0 & 0 & 1\\1 & -1 & -1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\q_1\\q_2\\t\end{bmatrix} \leqq \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}v$$
$$p_1 + p_2 + q_1 + q_2 + t = 1,\ p_1 \geqq 0,\ p_2 \geqq 0,\ q_1 \geqq 0,\ q_2 \geqq 0,\ t \geqq 0$$
という問題の最適解としてえられる．この問題の最適解は多重解で，
$$p_1^* = 0,\quad p_2^* = 1,\quad q_1^* = 0,\quad q_2^* = 0,\quad t^* = 0,\quad v^* = 0$$
と
$$p_1^{**} = 0,\ p_2^{**} = 0,\ q_1^{**} = 1,\ q_2^{**} = 0,\ t^{**} = 0,\ v^{**} = 0$$
である．この最初の最適解に対して
$$q^* = (q_1^*,\ q_2^*) = 0,\ b'p^* = (1 \quad -1)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = -1 < 0,\ t^* = 0$$
が成立し，２番目の最適解に対して
$$p^{**} = (p_1^{**},\quad p_2^{**}) = 0,\ c'q^{**} = (1 \quad 1)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 1 > 0,\ t^{**} = 0$$
が成立するので，定理 10 の(52)と(53)を満たす解が存在する．したがって，定理 10 よりリニアー・プログラミングの主問題と双対問題の両方に実行可能解が存在しないことがわかる．

参考文献

[１] Bennion, E. G., *Elementary Mathematics of Linear Programming and Game Theory*. East Lansing, Michigan : Michigan State University, 1960.

[２] Dantzig, G. B., "A Proof of the Equivalence of the Programming Problem and the Game Problem," in Koopmans, T. C. (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*. New York : John Wiley & Sons, 1951, pp. 330-335.

[３] Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*. Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1963.

[４] Dorfman, R., Samuelson, P. A., and Solow, R. M., *Linear Programming and Economic Analysis*. New York : McGraw-Hill Book Co., 1958.

[５] Gale, D., *The Theory of Linear Economic Models*. New York : McGraw-Hill Book Co., 1960.

[６] Gale, D., Kuhn, H. W., and Tucker, A. W., "Linear Programming and the Theory of Games," in Koopmans, T. C. (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*. New York : John Wiley & Sons, 1951, pp. 317-329.

[７] Gass., S. I., *Linear Programming : Methods and Applications*. Fifth Ed., New York : McGraw-Hill Book Co., 1985.

[８] Goldman, A. J., and Tucker, A. W., "Theory of Linear Programming," in Kuhn, H. W., and Tucker, A. W. (eds.), *Linear Inequalities and Related Systems*. Annals of Mathematics Studies No. 38, Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1956, pp. 53-97.

[９] Hadley, G., *Linear Programming*. Reading, Mass. : Addison-Wesley Publishing Co., 1962.

[10] Karlin, S., *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics*. Vol. I, Reading, Mass. : Addison-Wesley Publishing Co., 1959.

[11] Krekó, B. (trans. by Ahrens, J. H. L., and Safe, C. M.), *Linear Programming*. London : Sir Isaac Pitman & Sons, 1968.

[12] Luce, R. D., and Raiffa, H., *Games and Decisions : Introduction and Critical Survey*. New York : John Wiley & Sons, 1957.

[13] Vorob'ev, N. N. (trans. by Kotz, S.), *Game Theory : Lectures for Economists and System Scientists*. New York : Springer-Verlag, 1977.

[14] Williams, A. C., "Complementarity Theorems for Linear Programming," *SIAM Review*, Vol. 12 (1970), pp. 135-137.