利潤率の最大化

尾　崎　雄一郎

1．はじめに

完全競争，独占あるいは複占など市場形態が異なってもミクロ経済学における企業の生産行動は通常利潤最大化の観点から考察される（たとえば，Cohen and Cyert［2］, Ferguson and Maurice［3］, Hadar［4］, Henderson and Quandt［5］, Silberberg［6］, Varian［8］など）．本論文において十分に湾曲し，滑らかな逆S字型の総費用曲線を仮定し，これより導かれた滑らかでU字型をした平均費用曲線，限界費用曲線の下で「利潤率」を最大にする生産量はどのようなものであるか，また利潤率を最大にする生産量と利潤を最大にする生産量の大小関係を完全競争と独占の場合について考察するとともに，完全競争の下で利潤率を最大にする生産量と独占の下で利潤率を最大にする生産量の大小関係を明らかにする．

2．利潤率

以下において企業の生産量をq，生産物価格をp，総収入をTR，限界収入をMR，総費用をTC，平均費用をAC，限界費用をMC，利潤をπ，利潤率をρとする．利潤率の最大化について考察するとき，最大の利潤がゼロであったり，負であったりするならば，結果は自明であるか，無意味であるので，利潤

(1) $$\pi = TR - TC$$

が正となる，すなわち

(2) $$TR > TC$$

が成立する，あるいは

$$TR = pq, \quad TC = qAC$$

より

(3) $$p > AC$$

が成立する生産量が存在する場合について考察する．利潤率ρは総費用に対する利潤と定義され，

(4) $$\rho = \frac{\pi}{TC} = \frac{TR - TC}{TC} = \frac{TR}{TC} - 1 = \frac{p}{AC} - 1$$

と表される．(2)あるいは(3)より$\rho > 0$である．

３．完全競争の場合

最初に，完全競争の場合を取り上げる．完全競争の場合，生産物価格 p が一定であるから，十分に湾曲した逆 S 字型の総費用曲線の下では (4) より平均費用 AC が最小になる生産量のところで利潤率 ρ が最大になることが直ちにわかる．あるいは ρ を最大にするためには (4) より

$$\frac{d\rho}{dq} = -\frac{p}{AC^2}\frac{dAC}{dq} = 0$$

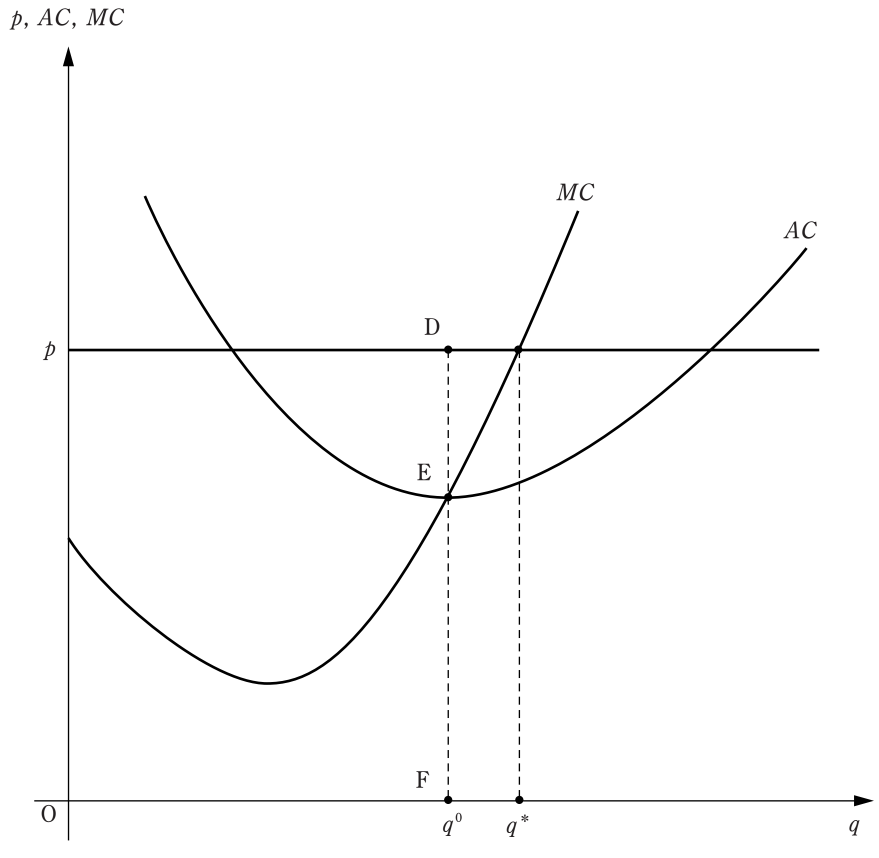
$$\frac{d^2\rho}{dq^2} = -\frac{p}{AC^3}\left[AC\frac{d^2AC}{dq^2} - 2\left(\frac{dAC}{dq}\right)^2\right] < 0$$

が成立しなければならない．これらより ρ が最大になるための条件として

(5) $$\frac{dAC}{dq} = 0,\quad \frac{d^2AC}{dq^2} > 0$$

が導びかれる．

(3) を満たす生産量が存在する第１図において最大の利潤率 ρ^0 は，AC が最小になる生産量 q^0 のところで達成されるから，(4) より



第１図

$$\rho^0=\frac{p}{AC}-1=\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{EF}}-1=\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EF}}$$

と表される．

同様に，(2) を満たす生産量が存在する第２図において最大の利潤率 ρ^0 は，AC が最小になる生産量 q^0 のところで達成され，

$$\rho^0=\frac{TR-TC}{TC}=\frac{\mathrm{GI}-\mathrm{HI}}{\mathrm{HI}}=\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{HI}}$$

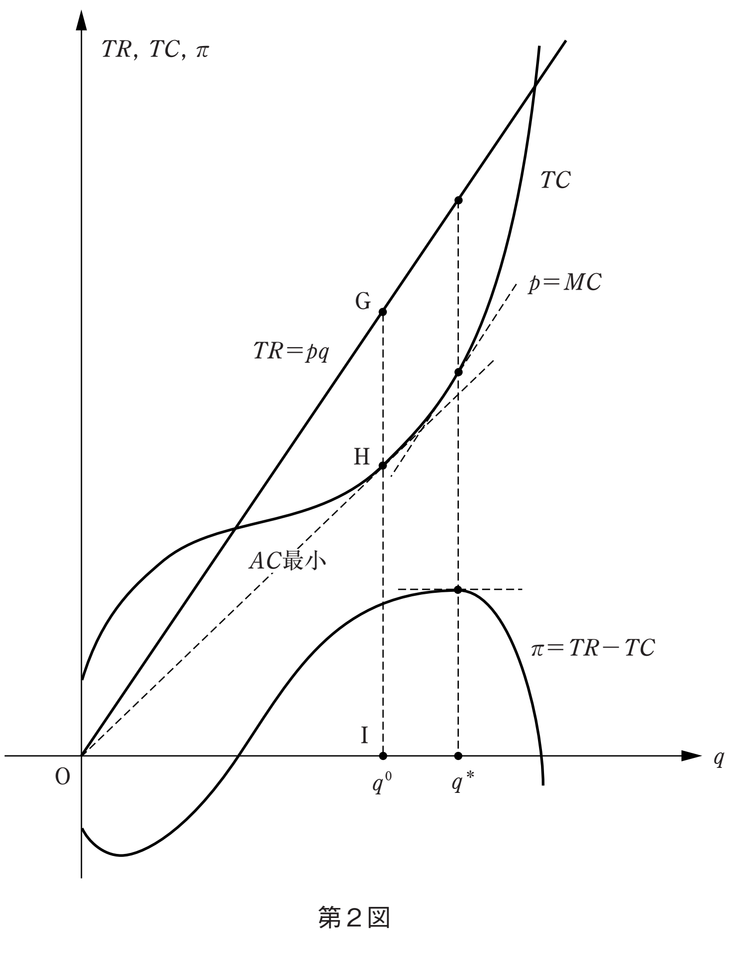
と表される．

次に，利潤率が最大になる生産量と利潤が最大になる生産量の関係について考察する．(2) すなわち (3) が成立する生産量が存在するとき，(1) で表される利潤を最大にするための条件は，

(6) $$p=MC,\quad \frac{dMC}{dq}>0$$

であるから，第１図と第２図の q^* のところで利潤が最大になる．これらの図からわかるように利潤率を最大にする生産量 q^0 は利潤を最大にする生産量 q^* より小さい，すなわち

(7) $$q^0<q^*$$



第２図

が成立する．

(7) は厳密に次のように示すことができる．平均費用 AC の変化率は

$$\frac{dAC}{dq}=\frac{d}{dq}\left(\frac{TC}{q}\right)=\frac{MC-AC}{q}$$

と表せるから，これより

$$MC-AC=q\frac{dAC}{dq} \tag{8}$$

をえる．(6) の最初の式を (8) に代入し，(3) を用いると，

$$p-AC=q\frac{dAC}{dq}>0$$

となるから，q^* のところで

$$\frac{dAC}{dq}>0 \tag{9}$$

である．いま，平均費用を $AC(q)$ と表し，q^0 と q^* の開区間で平均値の定理(たとえば，Apostol［１］, p. 110, Henderson and Quandt［５］, p. 394, Silberberg［６］, pp. 53-4, Silverman［７］, pp. 313-4 など)を適用すると，

$$AC(q^*)-AC(q^0)=(q^*-q^0)AC'(\bar{q}) \tag{10}$$

が成立する $\bar{q}=\theta q^0+(1-\theta)q^*$ $(0<\theta<1)$ が存在する．$AC(q^0)$ は AC の最小値であり，$AC(q^*)$ はそうではないから，

$$AC(q^0)<AC(q^*)$$

であり，また (5) より q^0 において $dAC/dq=0$，(9) より q^* において $dAC/dq>0$，AC 曲線は U 字型をしているから，$AC'(\bar{q})>0$ である．これらの事実と (10) より (7) が成立する．

４．独占の場合

本節で，独占の場合における利潤率の最大化について考察する．

市場の需要曲線を

$$p=-aq+b,\quad a>0,\ b>0 \tag{11}$$

とする．利潤率 ρ を最大にするためには，(4) より

$$\frac{d\rho}{dq}=-\frac{aAC+p\frac{dAC}{dq}}{AC^2}=0$$

$$\frac{d^2\rho}{dq^2}=-\frac{p}{AC^2}\frac{d^2AC}{dq^2}<0$$

が成立しなければならない．この場合，$dAC/dq\neq 0$ でなければならないから，これらより ρ を最大にするためには

$$-\frac{AC}{\frac{dAC}{dq}}=\frac{p}{a},\quad \frac{d^2AC}{dq^2}>0 \tag{12}$$

が成立しなければならない．(12) の２番目の不等式は，AC 曲線が U 字型をしているという仮定よ

り，常に満たされる．

⑶を満たす生産量が存在する第３図において需要曲線が横軸と交わる点 N から（AC 曲線が右下りである部分へ）接線を引く．接点 K に対応する生産量 q^0 のところで

$$p=\mathrm{JL},\ a=\frac{\mathrm{JL}}{\mathrm{NL}},\ AC=\mathrm{KL},\ -\frac{dAC}{dq}=\frac{\mathrm{KL}}{\mathrm{NL}}$$

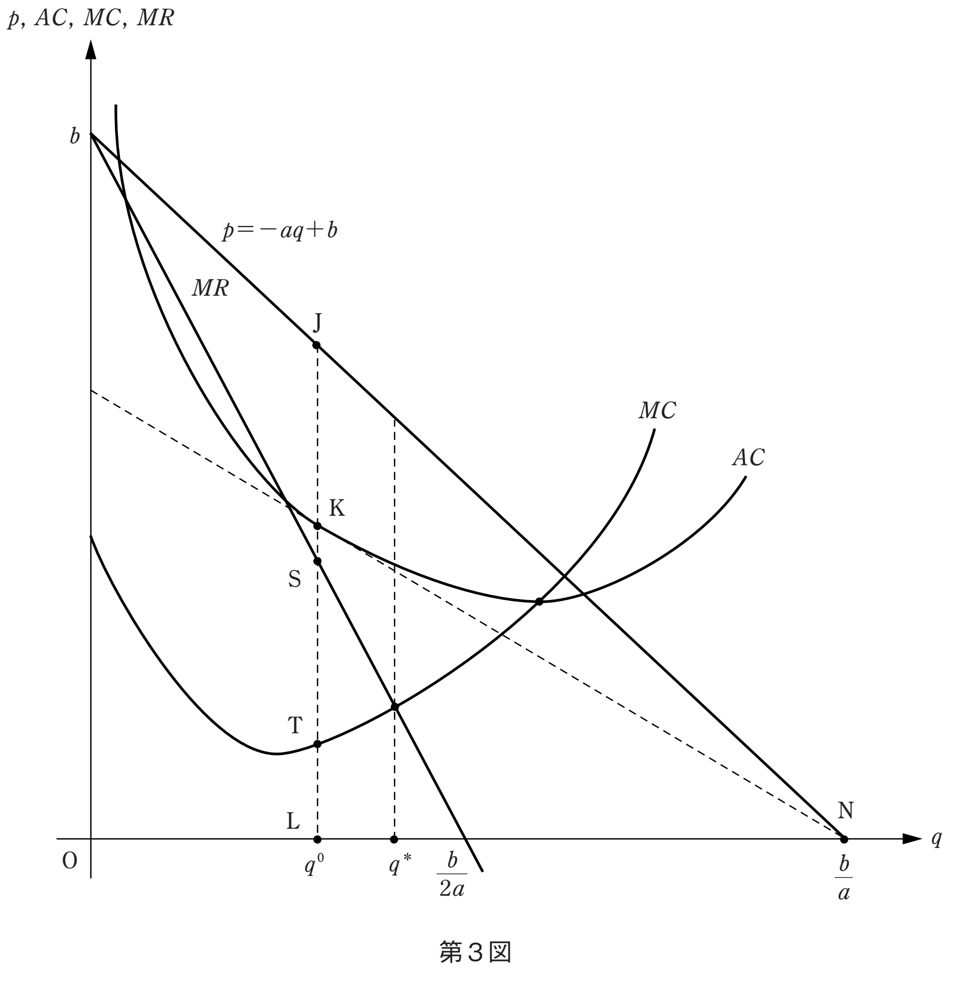
であるから，

$$-\frac{AC}{\frac{dAC}{dq}}=\frac{\mathrm{KL}}{\frac{\mathrm{KL}}{\mathrm{NL}}}=\mathrm{NL}=\frac{\mathrm{JL}}{\frac{\mathrm{JL}}{\mathrm{NL}}}=\frac{p}{a}$$

であり，(12)が成立する．ゆえに，q^0 のところで独占企業の利潤率は最大になる．最大の利潤率 ρ^0 は，

$$\rho^0=\frac{p}{AC}-1=\frac{\mathrm{JL}}{\mathrm{KL}}-1=\frac{\mathrm{JK}}{\mathrm{KL}}$$

と表せる．



第３図

総収入曲線と総費用曲線を用いて利潤率を最大にするためには，(4) より

$$\frac{d\rho}{dq}=\frac{MR\cdot TC-TR\cdot MC}{TC^2}=0$$

でなければならないから，これより利潤率を最大にする条件として

(13)
$$\frac{TR}{MR}=\frac{TC}{MC}$$

をえる．(2) を満たす生産量が存在する第４図において q^0 に対応する総収入曲線上の点 A での接線と総費用曲線上の点 B での接線が横軸上の同一の点 E で交わる．このとき，第４図より q^0 のところで

$$TR=\mathrm{AD},\ TC=\mathrm{BD},\ MR=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}},\ MC=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DE}}$$

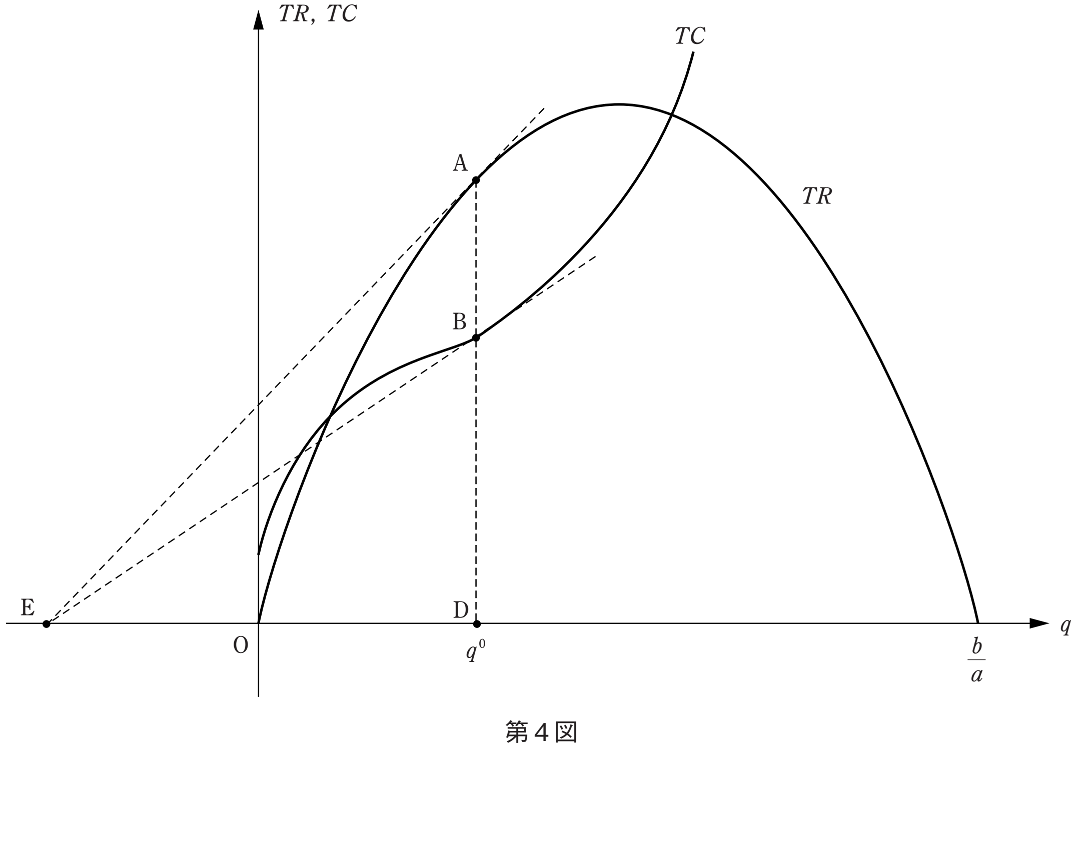
であるから，

$$\frac{TR}{MR}=\frac{\mathrm{AD}}{\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}}}=\mathrm{DE}=\frac{\mathrm{BD}}{\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DE}}}=\frac{TC}{MC}$$

が成立し，q^0 のところで (13) が満たされ，したがって利潤率が最大になる．最大の利潤率 ρ^0 は，(4) より

$$\rho^0=\frac{TR-TC}{TC}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}}$$

である．



第４図

また，(13) は

(14)
$$\frac{MR}{MC}=\frac{p}{AC}>1$$

と表せ，(3) の下でこの値は 1 より大きい．第 3 図において，

$$\frac{MR}{MC}=\frac{\mathrm{SL}}{\mathrm{TL}},\quad \frac{p}{AC}=\frac{\mathrm{JL}}{\mathrm{KL}}$$

であるから，

$$\frac{\mathrm{SL}}{\mathrm{TL}}=\frac{\mathrm{JL}}{\mathrm{KL}}$$

が満たされる q^0 のところで利潤率が最大になる．

(12) の最初の式と (13) はともに利潤率を最大にするための条件の 1 つであるが，表現は一見すると異なって見える．いま，これらが同一の条件であることを示す．(8) の MC を (13) に代入し，書き直すと，

(13′)
$$\frac{pq}{MR}=\frac{qAC}{AC+q\dfrac{dAC}{dq}}$$

となる．(11) を用いると，

$$MR=-2aq+b$$

であるから，

$$MR=p-aq$$

と表せる．この関係を (13′) に代入すると，

$$\frac{p}{p-aq}=\frac{AC}{AC+q\dfrac{dAC}{dq}}$$

となる．これを整理すると，(12) の最初の式をえる．

最後に，利潤率を最大にする生産量 q^0 は利潤を最大にする生産量よりも小さい，すなわち独占の場合にも (7) の関係が成立することを示す．(14) より利潤率が最大になる q^0 のところで

$$MR>MC$$

が成立する．他方，独占企業の利潤極大化の条件より，q^* のところで

(15)
$$MR=MC,\quad \frac{dMR}{dq}<\frac{dMC}{dq}$$

が成立する．利潤を

$$\pi(q)=TR(q)-TC(q)$$

と表し，平均値の定理を q^0 と q^* の開区間に適用すると，

$$\pi(q^*)-\pi(q^0)=(q^*-q^0)\pi'(\bar{q})$$

が成立する $\bar{q}=\theta q^0+(1-\theta)q^*$ $(0<\theta<1)$ が存在する．これより

(16)
$$\pi(q^*)-\pi(q^0)=(q^*-q^0)[MR(\bar{q})-MC(\bar{q})]$$

をえる．(14) と (15) を比較するとわかるように，q^0 のところでは利潤は最大ではない．したがって，

(17) $$\pi(q^*) > \pi(q^0)$$
であり，(14) より
$$MR(q^0) > MC(q^0)$$
であり，(15) より
$$MR(q^*) = MC(q^*)$$
であるから，q^0 と q^* の間の $\bar{q}$ で
(18) $$MR(\bar{q}) > MC(\bar{q})$$
が成立する．(16)，(17)，(18) より
$$q^0 < q^*$$
をえる．

最後に，完全競争の場合，利潤率を最大にする生産量は，(5) あるいは第１図や第２図から明らかなように平均費用を最小にする生産量であり，独占の場合 (12) あるいは第３図や第４図から明らかなように平均費用が減少している生産量のところである．したがって，同一の総費用曲線を仮定するならば，完全競争の下で利潤率を最大にする生産量のほうが，独占の下で利潤率を最大にする生産量よりも大きい．

参考文献

［１］Apostol, T. M., *Mathematical Analysis*. Second Edition, Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1974.

［２］Cohen, K. J., and Cyert, R. M., *Theory of the Firm: Resource Allocation in a Market Economy*. Second Edition, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1975.

［３］Ferguson, C. E., and Maurice, S. C., *Economic Analysis*. Revised Edition, Homewood, Ill.: Richard D. Irwin, 1974.

［４］Hadar, J., *Mathematical Theory of Economic Behavior*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1971.

［５］Henderson, J. M., and Quandt, R. E., *Microeconomic Theory: A Mathematical Approach*. Second Edition, N. Y.: McGraw-Hill Book Co., 1971.

［６］Silberberg, E., *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*. Second Edition, N. Y.: McGraw-Hill Publishing Co., 1990.

［７］Silverman, R. A., *Modern Calculus and Analytic Geometry*. Mineola, N. Y.: Dover Publications, 2002.

［８］Varian, H. R., *Microeconomic Analysis*. Third Edition, N. Y.: W. W. Norton, 1992.