連続体経済モデルとスコーレムの背理
（Continuum Economy and Skolem Paradox）

野　口　光　宣

1．序

連続体経済モデルは完全競争概念を厳密化するためにアーマン（Aumann, 1964）が考え出したものであり，スコーレム（Skolem, 1941）の背理は数学基礎論，とりわけ数理論理学の内部で生じたいわば自己矛盾である。はじめに，これら一見無関係に思える学問領域に属する二つの事柄が，どのように関係しているのかについて述べる。

よく知られているように，市場モデルの数学的定式化はワルラス（Walras, 1874）によってなされ，市場均衡の存在はアロー，ドブリュー（Arrow and Debreu, 1954）らによって初めて厳密に証明された。証明は角谷不動点定理（Kakutani, 1941）など，数学的に極めて抽象的で高度なテクニックを用いたもので，それは，市場均衡は常に存在するという古典派的主張に数学という絶対的方法によって客観的根拠を与えたものであるかのように思われた。しかし，アロー・ドブリューの証明を検討してみると，それは，確かに数学的には厳密であることは疑えないものの，極めて非現実的な仮定の上に成り立っていることがわかる。そのような仮定の一つに「完全競争」がある。彼らの理論では，消費者や生産者は価格を「所与」として消費や生産の最適選択を行うとされるが，それが可能となるためには個々の消費者や生産者の市場影響力は無視できるほど微小なものでなければならない。つまり，個々の経済主体は市場の規模に対して無視できるほど微小な存在でなければならないのである。ところが，アロー・ドブリューモデルでは経済主体の数は有限と仮定されており，その数がいくら大きいとしても有限である限り経済主体が無限小の存在になることなどあり得ない。そして，現実に地球上に存在するすべての経済主体の数は明らかに有限なので，有限性の仮定は現実的であるというのであれば，彼らの仮定する完全競争などそもそも現実には存在しないということになってしまう。

このジレンマに立ち向かったのがアーマンである。1964年にエコノメトリカで発表された論文の中で次のように述べている。

> 実際，個々の市場参加者の影響は，彼らの数が有限である限り数学的に無視できるものとはならない。したがって，完全競争の直観的理解にふさわしい数学的モデルは，無限の経済主体を含むものでなければならない。われわれはこの目的に沿った，もっとも自然な数学的モデルとして「連続経済主体」を含むものを提唱する。この，連続経済主体とはちょうど直線上の点の連続体，もしくは液体中の粒子の連続体のようなものである。

アーマンはこのような連続経済主体を含む市場モデルにも一般均衡解が存在することを証明した。その証明はアロー・ドブリューモデルの直面した完全競争のジレンマを数学的に解決したのみならず，それまでの効用理論が内包していた凸性の問題も同時に解決した。この凸性の問題とは次のようなものである。一般均衡解の存在証明は通常，角谷の生み出した不動点定理を用いる。この不動点定理は社会的超過需要が凸形になっていなければ成り立たない。そして，アーマン以前の理論はこの凸性を保証するために，個々の経済主体の効用が凸性を持つことを仮定した。この仮定は，二個のりんご，あるいは二個のみかんよりも，りんごとみかんそれぞれ一つずつの方が常に好ましいというような，極めて非現実的で強いものである。ところが，連続経済主体を考えると，個々の経済主体の効用が凸性を持たなくとも，いわば「連続無限和」をとる結果として社会的超過需要は凸形になる。この凸化作用はリアプノフの定理として知られ，連続経済主体や連続財集合などを含む市場モデルで重要な役割を果たす。

このように「連続無限」を市場モデルに導入することにより，アーマンは古典的市場モデルが直面していたジレンマや問題点を一気に解決したように思われた。一方，スコーレムはレーベンハイムとともに，数学基礎論の重要な定理の一つであるレーベンハイム・スコーレムの定理を証明した。数学の証明は所与の事実を公理系にまとめるところから始まる。そして，公理系の中の公理は自然言語をまったく使わずに記号だけで記述できる。いったん記号化された公理はもともとの意味を離れ，単なる記号の羅列とみなされるようになる。すると，証明，つまり公理系から推論によって正しい結論を導くという操作は，形式的な記号列からなる公理系に形式的な演繹操作を施して，形式的な記号列としての結論を導くというものになる。これがヒルベルト（Hilbert, 1900）以後の証明論の大雑把な考え方である。もう少し補足すると，現代的な証明論では，証明とは意味のある世界での意味のある文章をまず記号化し，いったん無意味な形式の世界に入ってそこで形式的な証明を行い，そこで得られた形式的な定理を再び意味のある世界で「解釈」し，実際に意味を持つ文章としての定理を得ることだとされるのである。

上述した「意味のある世界」のことを正式には「モデル」という。レーベンハイム・スコーレムの定理は，大雑把にいうと，公理系が矛盾を含まないならば公理系と同じ大きさのモデルが存在するということを主張する。このことを数学のもっとも基本的な理論である集合論について考えてみよう。集合論の公理系は高々可算個の公理からなる。そして，連続無限集合が存在するという主張は，集合論の公理系から形式的に証明可能であることが知られている。さて，この状況にレーベンハイム・スコーレムの定理を適用するとどうなるだろうか。もし集合論が整合的ならば，それは可算個の要素からなるモデルを持つということになる。その結果，集合論にもとづいて存在が証明されるすべての数学的対象は，高々可算個のものからなる宇宙で解釈されることになる。すると，そのような数学的対象の一つである連続無限集合も，高々可算個のものからなる宇宙の中に存在するということになってしまう！　これがスコーレムの背理である。

連続経済主体の概念は，確かに古典的なモデルが直面していたいくつかの難問を解決したには違いないが，数学の基礎理論の観点から見ると，それは形式的には存在証明が可能なものであるが，実際に存在するか否かは決定しようがないようなものなのである。本稿ではレーベンハイム・スコーレムの定理の内容とその意味するところを，少し詳細に検討してみたいと思う。

2．カントールの素朴集合論とラッセルの背理

集合を単純に「ものの集まり」と考える直観的な集合概念は，古代ギリシャ時代の数学の中にすでに見出されるが，現代的な意味での集合概念および集合論はカントール（Georg Cantor, 1845-1918）によって確立された。そこでまず，カントールがどのような経緯で集合の問題と関わるようになり，最終的にどのような集合論に辿り着いたのかを見てみることにする。

カントールは1863年にベルリン大学に入学し，数学，物理学，哲学を学んだ。大学での数学の教師達の中にはクンマー（E. E. Kummer, 1810-1893），後によき理解者となったワイアシュトラス（K. Weierstrass, 1815-1897），生涯を通しての宿敵となったクロネッカー（L. Kroncker, 1823-1891）がいた。1867年にガウスの数論に関する学位論文を書き，それによって同年，博士号を授与された。その後，1869年にハルレ（Halle）大学で私講師（受講生から直接給料を支払ってもらうという身分）としての職を得，そこで，後に数論で有名となったデデキント（J. W. R. Dedekind, 1831-1916）と出会う。卒業論文や学位論文から明らかなように，カントールはもともと整数論に関心を持っていたようであるが，ハルレ大学に移ってからは，ワイアシュトラス派，特にハイネ（H. E. Heine, 1821-1881）から刺激を受けて，解析学の厳密な理論化，とりわけリーマン（G. F. B. Riemann, 1826-1866）の残した三角級数（フーリエ級数）論の問題に関心を持つようになった。

具体的には，三角級数に関するある既知の定理の改良を試みたのだが，そのとき，区間内で定理が成り立たないような「例外点」の集合を特徴付ける必要が生まれた。そのような中で「集積点」などの概念に到達し，いまでいうところの点集合論を作り上げる結果となったのである。

カントールは1874年に発表した「実の代数的数全体の集合の一つの性質について」という論文の中で，当時脚光を浴びていた超越数の問題を扱った。代数方程式の解となる数のことを代数的数というが，超越数とはこの代数的数ではない数のことである。当時，あたえられた数が代数的でないことを証明するのは非常に困難であると考えられていた。エルミート（C. Hermite, 1822-1901）は純粋整数論的な方法によってeの超越性を証明したが，このたった一つの数の超越性を証明するために大変な労力を費やしたことが知られている。この問題に対してカントールは斬新なアプローチを思いついた。それは，代数的数の集合が可付番（自然数の集合と同じ大きさ）であるのに対して，超越数の集合は非可付番（自然数の集合よりも大きい）であるということを証明し，間接的に超越数の存在を証明するというものであった。これらの数の集合はもちろん無限集合である。

カントールによる超越数の存在定理の証明には無限集合が出てきた。クロネッカーは，カントールが無限集合についての推論に古典的・アリストテレス的論理を用いたことに対して批判的だった。批判の具体的な内容は次のようであった。カントールは，有理係数の多項式は既約か既約でないかのどちらかであるという議論を用いたのだが，クロネッカーは，この議論は古典的な排中律の適用で，それは有限集合を対象にした場合にしか正当化できないと主張し，カントールの証明は非構成的（有限的な手続きの規則によって正当化されたものではない）非論理的であると非難した。

周囲からの批判にもかかわらず，カントールは無限集合の概念をさらに深化して行った。カントールはもともと直線上の理論であった点集合論を平面や空間，さらには抽象的なn次元ユークリッド空間にまで一般化して行った。その結果，直線上で考えられた種々の集合論的概念はn次元ユークリッド空間でも通用するものとなった。そして，n次元ユークリッド空間内の点が直線上の

点と一対一に対応するという驚くべき事実を発見したのである。その後，さらに無限集合に関する一般理論建設に向けて努力を重ね，次第に，連続的対象を扱う幾何学や解析学から非連続的対象を扱う整数論にいたる全分野を，集合概念を唯一の基礎として統合しようと意図するようになった。そこで当面の問題となったのは，無限集合の濃度（大きさ）を測るということであった。有限集合の濃度（要素の数）は自然数によって問題なく測れるが，連続体のような無限集合の濃度となると，そもそも何を集合の「大きさ」として定義すればよいのかが問題になる。

カントールはこの問題を，アリストテレス以来の西洋哲学の伝統の中で否定され続けてきた「実無限」概念を導入することで解決することにした。哲学での実無限概念は数学的対象としては超限順序数に対応するものであった。超限順序数とは大雑把にいうと，自然数を集合論的に構成するときに適用する生成ルールを，自然数全体という一つの集合に適用し，さらにその結果得られた全体に適用し，という具合にして，自然数の無限列をどんどん先に引き伸ばしていったようなものである。カントールはこの超限順序数を用いて無限集合の濃度を測るというアイディアを思いついた。しかし，このような無限対象を数学に導入するということに対しては数学者達の反発，特にガウスなどからの強い反発があった。

ツェルメロは1905年に，どんな集合の濃度も超限順序数によって測られるということを証明した。これは，カントールの主張を肯定的に支持するものとして受け止められたが，実は，このときのツェルメロによる証明は，「選出公理」というもう一つの受け入れがたい仮定に依存したものであった。さて，連続体濃度に関しては依然として不明な点が多い。たとえば，連続体濃度が可算濃度の「次」かどうかという問題は連続体問題として知られるが，この問題は一見単純であるにもかかわらず現在に至ってもなお未解決である。カントールが創始した点集合論や測度論は，後に現代数学のトポロジーやボレル・ルベッグの測度論・積分論へと発展して行った。そして，集合論を基礎に数学全体を体系化するというカントールの当初の目論見は成就したかに見えた。ところが皮肉にも，ちょうどこのころ，集合概念そのものの中に背理が発見されてしまったのである。数学史家によると，1896年頃，カントール自身がこの背理についてすでに自覚していたということである。この背理の存在を明らかにしたのはブラリフォルチ（C. Burali-Forti, 1861-1931）で，具体的には，超限順序数の全体は矛盾を含むということを示す形で背理の存在を明確化した。ここで，背理を生み出す結果となってしまった集合概念とはそもそもどのようなものであったかをみてみよう。

以下はカントールが「超限集合論の基礎に対する寄与」（Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, 1895）の冒頭であたえた集合の定義で，後に広く受け入れられるようになったものである。

> 集合とはわれわれの思惟や直観の対象で，確定できかつ区別できるものmを一つの全体へとまとめあげたものである。

この定義は集合の定義としては極めて緩いもので，それによれば超限順序数の全体，あるいは集合の全体のような巨大な対象もみな集合として認めてしまう。後に明らかになるように，何でも集合として容認してしまうような緩い定義は，結果として様々な背理を生み出してしまう。直観主義者のブラウアーは，要素を生成するための具体的な規則が与えられないような対象は集合として認

めるべきでなく，そのような対象にアリストテレスの形式論理を適用すると必然的に矛盾が生じると主張した。

ここで，集合を記述する方法について考えてみよう。一つの方法としては「ものの集まり」に属する個々の対象を具体的にすべて列挙するというものが考えられる。しかしこの方法は「ものの集まり」が有限個の対象からなるときには使えるが，無限個の対象からなるときには使えない。そこでより一般的な方法として,「ものの集まり」に属する対象がみたすべき条件を記述するという方法が考えられる。ただしこのような条件の記述は数学的に厳密である必要があるので，記述に用いられる言語は曖昧さが排除された正確な表現を可能とするものでなければならない。そこでそのような言語として一階の形式的言語 $\mathfrak{L}_1K=$ を用いることにする。すると，新たな集合の定義として「一階の形式的言語によって記述される性質を持つものの集まり」というものが考えられる。この新しい定義によると，集合は一般的に記号によって $\{x \mid Px\}$ のように表される。ここで P は $\mathfrak{L}_1K=$ の述語である。さてこの定義は一見自然なものに見えるが，よく知られているようにラッセルの背理（Russel's paradox）とよばれる困難を惹き起こしてしまう。ラッセルの背理とは次のようなものである。まず $U=\{x|x \notin x\}$ は上の定義によると集合である。ここで排中律を用いると，$U \in U$ か $U \notin U$ のどちらかが成り立つことになる。もし $U \in U$ ならば U の定義によって $U \notin U$ となり，また，$U \notin U$ ならば再び U の定義によって今度は $U \in U$ となる。したがっていずれの場合にも $U \in U$ かつ $U \notin U$ という矛盾が導かれ，結局は仮定無しに矛盾が出てきてしまうことになる。

ラッセルの背理は，集合の定義があまり多くのものを集合として許してしまうと，集合論が矛盾を内包するようになることを示唆している。もし，集合論が矛盾を内包するならば，どのような命題も証明可能となってしまい，証明は一切無意味なものへと化してしまう。したがってラッセルの背理は，集合論をあらゆる数学の基礎と考える立場の者にとっては絶対に回避されるべきものである。ラッセルの背理を回避するには，背理が生じない程度に集合の定義を厳しくし，集合として許される対象を制限するようにしなければならない。しかし，あまり定義を厳しくしすぎると今度は集合が少なくなってしまい，既知の数学的対象を集合論的に構成し直すという作業が困難に陥ってしまう。

カントールが創始した集合論は直観的で実際的な集合概念にもとづいているので，**素朴集合論**（naive set theory）とも呼ばれる。素朴集合論はまさにわれわれが初等数学で学ぶ集合論であり，そこでの集合概念は「ものの集まり」というような直観的なもので，また，交わりや合併といった集合演算およびそれらの従う法則も直観的なものである。

3．公理的集合論の出現

素朴集合論は直感的で実際的であるために，すべての数学の基礎として「確かなもの」であるという印象を与える。ところが，素朴集合論の内容を検討してみると，そのなかにはいくつもの暗黙の仮定が設けられていることに気付く。たとえば「要素の等しい二つの集合は等しい」とか「空集合が存在する」はそのような暗黙の仮定である。さて，素朴集合論に対するものとして**公理的集合論**（axiomatic set theory）というものがある。これは，素朴集合論の「暗黙の仮定」を公理として

明示的にし，さらにいくつかの技術的な公理を加えて集合論の公理系を作り，その公理系が許容する対象だけを集合として認めるというものである。代表的な公理系としては，ベルネイ・ゲーデル（Bernays-Gödel）による公理系 BG，および，ツェルメロ・フレンケル（Zermelo-Fraenkel）による公理系 ZF が知られている。ここでは，ZF に**選出公理**（axiom of choice）AC を付加して得られた，いわゆる ZFC とよばれる公理系を取り上げることにする。

ZFC は，集合の同等性に関する公理，空集合と無限集合の存在に関する公理，さらに，既知の集合から新たな集合の生成を可能にするための公理から成り立っている。

はじめに，ZFC ではラッセルの背理が回避されることを示す。前は，集合を「一階の形式的言語によって記述される性質を持つものの集まり」として定義した結果，ラッセルの背理に陥ってしまった。そこで ZFC では集合として許される対象をさらに制限するために，「すでに集合とわかっているもの a の要素 x のうちで，一階の形式的言語の述語 P によって記述される性質を持つものの集まり $\{x\in a|Px\}$ は集合である」という公理を設ける（分出公理）。さらに，集合はその要素だけで一意に決まるという公理（外延性公理）を導入して，$\{x\in a|Px\}$ が集合として確定するようにする。さてそれでは，これら二つの公理を導入するだけで，本当にラッセルの背理は回避されるのかどうかを見てみよう。そこで，まず，上の二つの公理の下で集合と認められるものの総体を V とし，V が集合であると仮定してみる。すると分出公理により $U=\{x\in V|x\notin x\}$ は集合となる。しかし，これでは明らかに以前と同じようにしてラッセルの背理に陥ってしまう。そこで，「任意の集合 a と b に対して，要素がちょうど a と b であるような集合 $\{a,\ b\}$ が存在する」という公理（非順序対の存在公理）を新たに導入する。ここで，非順序対は外延性公理によって集合として確定するということに注意する。$a=b$ のときには，a と b の順序対 $\{a,\ a\}$ を $\{a\}$ のように簡略化する。さらに，「非空な集合 a はその要素 b で a とは共通の要素を持たないものを含む」という公理（正則性公理）も導入する。

a が集合ならば $\{a\}$ は非空な集合となるので，正則性公理によって，$\{a\}$ は自分と共通の要素を持たない集合 b を要素として含むことになるが，そのような b としては a しかありえないので $\{a\}$ と a は共通の要素を持たないこととなり，その結果 $a\notin a$ となる。ここで，これまでに出てきた4つの公理の下で集合と認められるものの総体を V と置いてみよう。もし V が集合ならば $V\in V$ が成り立たなければならないが，上での正則性に関する議論からこれは不可能である。したがって，これら4つの公理の下では，すべての集合からなる集合なるものは存在しないことになる。このようにして ZFC ではラッセルの背理が回避されるのである。

以下はこれまでに導入した公理である。

- 分出公理
- 外延性公理
- 非順序対の存在定理
- 正則性公理

それでは次に，ZFC が基本的な数学的対象を構成するのに十分な数の集合を備えているかどうかをみてみよう。はじめに，基本的な数学的対象として自然数を取り上げて考察することにする。

まずは集合が一つ存在しなければ何も始まらない。そこで ZFC では「空集合 $\emptyset$ が存在する」という公理（空集合の存在公理）を導入する。ここで，空集合の存在に加えてその非順序対の存在も考えると，この時点で少なくとも二つの集合 $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ の存在が保証されたことになる。ここでさらに，既知の集合から新たな集合を生成するための「x を任意の集合とするとき，その要素を合併させたものはそれ自身集合である」という公理（合併集合の存在公理）を導入する。$x=\{a,\ b\}$ の合併集合は簡略化して $a\cup b$ のように表すものとする。

合併集合の公理を用いると，任意の集合 a に対し，その後継ぎ $a^+=a\cup\{a\}$ を定義することができる。後継ぎを空集合 $\emptyset$ に適用すると，$\emptyset$ とも $\{\emptyset\}$ とも異なった新たな集合 $\emptyset^+=\emptyset\cup\{\emptyset\}$ が得られる。さらにこの操作を繰り返していくと，$\emptyset$，$\emptyset^+$，$\emptyset^{++}$，$\emptyset^{+++}$，… という，いかにも自然数の集合らしい対象が得られる。しかし，上のような，無限個の要素を含む対象が集合となるかどうかはまったく自明でないことに注意する。一般に，$\emptyset\in a$ で $x\in a\Rightarrow x^+\in a$ という性質を持つような集合 a のことを無限系譜という。ZFC では無限集合の存在を保証するために，「無限系譜が存在する」という公理（無限公理）を導入する。定義から明らかなように，無限系譜は $\emptyset$，$\emptyset^+$，$\emptyset^{++}$，$\emptyset^{+++}$，… を要素として含む。さてこのままでは，このような無限系譜がたくさん存在してしまう可能性があり，自然数を無限系譜として定義しようとするとき，複数存在することになってしまいかねない。そこでまず，公理によって存在が保証されている無限系譜の中から一つを選んで a とし，a の部分集合となっている無限系譜からなる集合を $\tilde{a}$ と置く。そして $\tilde{a}$ の要素の共通部分を ω_a と置く。すると，ω_a 自身が無限系譜となることがわかる。次に，b を a とは異なった無限系譜とする。そして，a の場合と同様にして ω_b を定義する。すると，$\omega_a=\omega_b$ となることが示される。このことは，無限系譜 ω_a がそれを定義するのに用いた特定の無限系譜 a には依存しないということを示している。さらに，このようにして得られた無限系譜 ω は，すべての無限系譜の共通部分でとなり，その意味で「最小」の無限系譜であるということも容易に示される。

さて，上で a から $\tilde{a}$ を作る際に，a のすべての部分集合からなる集合が必要となった。一般に x を任意の集合とするとき，x のすべての部分集合からなる集合を x の**冪集合**（power set）といい，記号で $\mathfrak{P}(x)$ のように表す。冪集合が実際に集合かどうかはまったく自明でない。そこで，ZFC では「冪集合が存在する」を公理（冪集合の存在公理）として導入する。すると $\tilde{a}$ は，「x が無限系譜である」という述語を P として，

$$\tilde{a}=\{x\in\mathfrak{P}(\alpha)\,|\,Px\}$$

のように表わされる。ここで ω の要素 $\emptyset$，$\emptyset^+$，$\emptyset^{++}$，$\emptyset^{+++}$，… を 0，1，2，3，… と考えると自然数の集合が得られる。自然数の集合の要素 0，1，2，3，… はそれら自身が集合で，$0\subset 1\subset 2\subset 3\subset\cdots$ という包含関係を満たすということに注意する。ここで $\subset$ を $\leq$ と考えると自然数上での通常の大小関係が得られる。

先に導入された 4 つの公理に加えて，自然数の構成上新たに必要となった公理は以下の 4 つである。

- 空集合の存在公理
- 合併集合の存在公理

- 冪集合の存在公理
- 無限公理

４．ZFC 集合論

さて，次に考察する基本的な数学的対象は関数である。以下では，関数が ZFC においてどのような集合として定義されるのかを見ることにする。はじめに，二つの集合 a，b の直積 $a \times b$ を定義する。ここでは，$a \times b$ を a の要素 x と b の要素 y の順序対 (x, y) の総体として定義する。ただし，集合 x，y の順序対 (x, y) とは，非順序対 $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ のこととする。定義から明らかなように，二つの順序対 (x, y) と (x', y') の間には

$$(x, y) = (x', y') \Longleftrightarrow x = x' \text{ かつ } y = y'$$

という関係が成り立つ。$x \in a$，$y \in b$ とすると，$\{x\} \subset a$，$\{x, y\} \subset a \cup b$ となるので，$\{x\}$ も $\{x, y\}$ も $\mathfrak{P}(a \cup b)$ の要素となり，その結果 $(x, y) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(a \cup b))$ となる。ここで，「a の要素と b の要素の順序対である」という述語を Q とすると

$$a \times b = \{z \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(a \cup b)) \mid Qz\}$$

となり，外延性公理によって $a \times b$ は集合として確定する。

$f \subset a \times b$ のとき，$\mathbf{Dom}(f) = \{x \in a \mid \exists y\,(x, y) \in f\}$ を f の**定義域**（domain）といい，$\mathbf{Im}(f) = \{y \in b \mid \exists x\,(x, y) \in f\}$ を f の**値域**（image）という。a から b への**関数** f（function）は

$$\{f \in \mathfrak{P}(a \times b) \mid (\mathbf{Dom}(f) = a \wedge (\forall x \forall y \forall y'(((x, y) \in f \wedge (x, y') \in f) \rightarrow y = y')))\}$$

によって定義される。$\mathbf{Im} = b$ が成り立つとき，関数 f は**全射**（surjective）であるといい，また，$\forall x \forall x'(((x, y) \in f \wedge (x', y) \in f) \rightarrow x = x')$ が成り立つとき，関数 f は**単射**（injective）であるという。さらに，関数 f が全射かつ単射であるとき，f は**全単射**（bijective）であるという。

次に，集合の濃度概念について考察する。集合 a と自然数 ω の間に全単射が存在するとき，a を**有限集合**（finite set）という。また，有限集合以外の集合のことを**無限集合**（infinite set）という。二つの自然数 m，$n \in \omega$ について，m と n の間に全単射が存在することと，$m = n$ となることは同値である。そこで，a が有限集合で，かつ，a と $n \in \omega$ の間に全単射が存在するとき，a の**濃度**（cardinality）は n であると定義することができる。このことを $\mathbf{Card}(a) = n$ と表わす。$0 = \emptyset$ であることから，$\mathbf{Card}(\emptyset) = 0$ となる。

いったん自然数を集合論的に構成してしまうと，整数，有理数，実数などのような他の数も，これまでに導入された公理だけを用いて集合論的に構成することが可能となる。

次に，有限集合以外の集合の濃度についてを考えてみる。

定義１．集合 a に対して，部分集合 $\prec \subset a \times a$ が

反射律：$x \prec x$

反対称律：$x \prec y$ かつ $y \prec x \Longleftrightarrow x = y$

推移律：$x \prec y$ かつ $y \prec z \Longleftrightarrow x \prec z$

を満たすとき，$\prec$ を a 上の**順序関係**（order relation）といい，組 $(a, \prec)$ を**順序集合**（ordered set）という。

たとえば集合上の包含関係は順序関係である。

定義２．順序集合 $(a,\ \prec)$ の非空な部分集合がすべて $\prec$ に関して最小の要素を持つとき，$(a,\ \prec)$ を整列集合（well-ordered set）という。

たとえば，$(\omega,\ \subset)$ は整列集合であるが，整数の集合と不等号からなる $(\mathbf{Z},\ \leq)$ は整列集合ではない。

定義３．整列集合 $(a, \prec)$ の任意の要素 x について $x=\{y\in a \mid y\prec x$ かつ $y\neq x\}$ が成り立つとき，$(a, \prec)$ を順序数（ordinal number）という。

ω は典型的な順序数である。さてここで，必ずしも有限集合とは限らない集合 a の濃度 $\mathbf{Card}(a)$ を順序数によって定義してみよう。そのためにはまず，それぞれの整列集合に，唯一つの順序集合が対応するということを示さなければならない。このとき置換公理とよばれる新たな公理が必要となる。さらに，a がどのような集合であったとしても，適当な順序関係 $\prec$ を選ぶことによって $(a,\ \prec)$ は整列集合になるということを示さなければならない。そのためには，整列化可能定理とよばれるものが必要になる。よく知られているように，整列化可能定理は選出公理と同値である。最後に，$(a, \prec)$ に対応する順序数が順序関係 $\prec$ の選び方には依存せずに決まるということを示す。このときの順序数を $\mathbf{Card}(a)$ とするのである。

集合の濃度を集合論的に構成するためには，新たに以下の二つの公理が必要となった。

- 置換公理
- 選出公理

次に，ZFC を一階の形式的言語で記述することを試みる。集合論の非論理語は本来 $\in$ だけなので，非論理語集合は $K_\in=\{\in\}$ でよいのであるが，ここでは公理系の表現をできるだけ簡単にするために以下の定義式によって新たな非論理語を導入することにする。

定義１：（空集合定数の定義）

$\delta_\emptyset \simeq \forall y(\emptyset=y\leftrightarrow \forall z\neg z\in y)$

定義２：（非順序対関数記号の定義）

$\delta_{\{,\}} \simeq \forall x\forall y\forall z(\{x,\ y\}=z\leftrightarrow \forall w(w\in z\leftrightarrow (w=x\vee w=y)))$

定義３：（和集合関数記号の定義）

$\delta_\cup \simeq \forall x\forall y\forall z(x\cup y=z\leftrightarrow \forall w(w\in z\leftrightarrow (w\in x\vee w\in y)))$

定義４：（積集合関数記号の定義）

$\delta_\cap \simeq \forall x\forall y\forall z(x\cap y=z\leftrightarrow \forall w(w\in z\leftrightarrow (w\in x\wedge w\in y)))$

定義５：（冪集合関数記号の定義）

$\delta_\mathfrak{P} \simeq \forall x\forall y(\mathfrak{P}(x)=y\leftrightarrow \forall z(z\in y\leftrightarrow \forall w(w\in z\rightarrow w\in x)))$

定義６（部分集合述語記号の定義）

$\delta_\subset \simeq \forall x\forall y(x\subset y\leftrightarrow \forall z(z\in x\rightarrow z\in y))$

拡張された非論理語集合は $K_{ZFC}=K_\in\cup\{\emptyset,\ \{,\},\ \cup,\ \cap,\ \mathfrak{P},\ \subset\}$ となる。

次に ZFC の９つの公理を与える。以下では，$K_\in-$ 論理式 θ の自由変数が集合 $\{y_1,\ \cdots,\ y_n\}$ に含まれることを $\theta(y_1,\ \cdots,\ y_n)$ のように書くこととする。

公理１：外延性公理（the axiom of extensionality）

$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x=y)$

この公理は, 同じ要素を持つ集合同士は互いに等しいということを形式的に表現したものである。

公理２：分出公理（separation axioms）$K_{\in}$－ 論理式 $\theta(z,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$ と，$z,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$ とは異なった，相異なる個体変数 $x,\ y$ に対して，

$\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall x \exists y \forall z(x \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \theta(z,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)))$

この公理は，集合 x，および $K_{\in}$－ 論理式 $\theta(z,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$ を形式的表現とする性質 $\boldsymbol{P}$ に対して，$\{z \in x | z$ は性質 $\boldsymbol{P}$ を持つ$\}$ という集合が存在することを保証する。

公理３：非順序対公理（the pair set axiom）

$\forall x \forall y \exists z \forall w(w \in z \leftrightarrow (w=x \vee w=y))$

この公理は，二つの集合 $a,\ b$ が与えられたとき，ちょうどそれらを要素とする集合 $\{a,\ b\}$ が存在するということを形式的に表現したものである。

公理４：合併集合公理（the sum axiom）

$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists w(w \in x \wedge z \in w))$

この公理は，集合 c が与えられたとき，c の要素となっている集合の合併集合が存在するということを形式的に表現したものである。

公理５：冪集合公理（the power set axiom）

$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \forall w(w \in z \rightarrow w \in x))$

この公理は，任意の集合に対してその冪集合が存在するということを形式的に表現したものである。

公理６：無限公理（the axiom of infinity）

$\exists x(\exists y(y \in x \wedge \forall z \neg z \in y) \wedge \forall y(y \in x \rightarrow \exists z(z \in x \wedge \forall w(w \in z \leftrightarrow w \in y \vee w=y))))$

この公理は，無限系譜が存在するということを形式的に表現したものである。

公理７：置換公理（replacement axioms）任意の $K_{\in}$－ 論理式 $\theta(x,\ y,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$，および，相異なる個体変数 $u,\ v$ で $x,\ y,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$ とは異なっているものに対して，

$\forall x_1 \cdots \forall x_n(\forall x \ni ! y \theta(x,\ y,\ x_1,\ \cdots,\ x_n) \rightarrow \forall u \exists v \forall y(y \in v \leftrightarrow \exists x(x \in u \wedge \theta(x,\ y,\ x_1,\ \cdots,\ x_n))))$

これは少しわかりにくいかも知れないが,「パラメーター」$x_1,\ \cdots,\ x_n$ を固定するときに,「関係」$\theta(x,\ y,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$ が関数 $x \mapsto y$ を定義するならば，その関数の値域は集合になるということを形式的に表現したものである。

公理８：正則性公理（the axiom of regularity）

$\forall x(\exists y y \in x \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in x \wedge z \in y)))$

この公理は，非空な集合 a に対して，その要素 b で，b のいかなる要素も a に含まれないようなものが存在するということを形式的に表現したものである。

公理９：選出公理（the axiom of choice）

$\forall x(\forall y(y \in x \rightarrow \exists z y \in z) \wedge \forall u \forall v((u \in x \wedge (v \in x \wedge \neg u=v)) \rightarrow \forall y(u \cap v=y \leftrightarrow \forall z \neg z \in y))) \rightarrow \exists y \forall w(w \in x \rightarrow \exists ! z z \in w \cap y)$

この公理は，a を互いに交わらない非空な集合からなる集合とするとき，a の中の各集合の要素

をちょうど一つだけ含むような集合が存在するということを形式的に表現したものである。

公理１から公理９までの $K_{\in}-$ 文からなる集合を $\Gamma_{\in}$ と置くと，

$$\Gamma_{ZFC}=\Gamma_{\in}\cup\{\delta_{\emptyset},\delta_{\{,\}},\delta_{\cup},\delta_{\cap},\delta_{\subset},\delta_{\mathfrak{P}}\}$$

となる。ここで，$\Gamma_{\in}$ に定義を付加した後で証明可能となる $K_{\in}-$ 文の数が前と同じであるためには，任意の $K_{ZFC}-$ 文 θ について

$$\Gamma_{ZFG}\vDash\theta\Leftrightarrow\Gamma_{\in}\vDash\boldsymbol{I}(\theta)$$

が成り立たなければならない。この証明の詳細は集合論のテキストに委ねることにするが，たとえば $\emptyset$ については

$$\Gamma_{\in}\vDash\ \exists\,!y\forall z\neg z\in y$$

を示せばよい。

５．連続体経済とスコーレムの背理（まとめ）

数学者が数学で扱う対象には，数や点などのようないわば「単純」な対象と，集合や関数などのような「複雑」な対象がある。ここでは，それらの数学的対象を一まとめにして**宇宙**（universe）とよび，記号 $\boldsymbol{U}$ で表すことにする。

さて，すべての数学的対象は究極的には集合に還元されるということは，これまで見てきたように経験的には間違いないようである。もし本当にそうだとすると，宇宙 $\boldsymbol{U}$ は集合という一種類の対象から成り立っていることになる。そして，数学者が述べる命題はすべて集合論の言葉で表現でき，数学者による証明はすべて集合論の法則にもとづいて生成されるという考えが根拠を得ることになる。このように考えるとき，*ZFC* は，この，数学者が前提として受け入れている集合論の法則を形式的に表現し公理化したものであるといえる。この意味で，*ZFC* はすべての数学理論の基礎であるといえるのである。このように集合という単一の組成からできている宇宙に一次的に与えられたものとして集合論を考えるとき，**背景的集合論**（background set theory）という言い方をする。

一方，われわれは他の数学理論と同様，*ZFC* 自身を分析や考察の対象とすることができる。例えば *ZFC* の整合性などを問題とすることができる。このように，集合論自身が分析や考察の対象となるとき，**対象的集合論**（object set theory）という言い方をする。前述したように，*ZFC* は $\boldsymbol{U}$ 自身の法則を公理化して得られたものなので，*ZFC* の中の公理を $\boldsymbol{U}$ で元通りに解釈すると，それらは当然正しいものとなる。ここで，$\boldsymbol{U}$ を領域と考え，これと元通りの意味への解釈を組にすると *ZFC* のモデルが得られるのではないかと思われるかも知れないが，それは誤りである。なぜなら前にも述べたように，$\boldsymbol{U}$ のように「巨大」な対象は集合とはなり得ないからである。

$\boldsymbol{U}$ は *ZFC* の公理によって存在が保証されている集合からなる。そこで，$\boldsymbol{U}$ の中の集合を単に「*ZFC* の集合」ということにする。

完全性定理によると，論理式の集合 Γ が整合的ならば充足的となり，その結果 Γ のすべての論理式を充足する構造 $\boldsymbol{M}=\langle d,\ I\rangle$ が存在することになる。さて，この場合の領域 d は *ZFC* の集合といえるのであろうか。ここで，Henkin の定理の証明の中で項の集合を用いたことを思い出す。しかし，そもそも項の集まりは *ZFC* の集合なのだろうか。われわれは，アルファベット等の文字セッ

トから出発し,それから一定のルールにしたがって生成された記号列として項や論理式を定義した。ところが，中学・高校の数学でも集合だとして習った $\{a, b, c\}$ のような文字セットは，実は ZFC の集合とは言えないものである。なぜなら，ZFC の集合として存在が保証されているものは，空集合をはじめ，自然数，有理数，実数，順序数などだけだからである。

このように ZFC の集合は非常に限られたものであるが，普通に数学をやって行く上ではそれらで十分であることがわかる。たとえばわれわれが遭遇した文字セットの問題も a，b，c，… の代わりに ZFC の自然数 0，1，2，… などを用いれば解決する。その他，個体変数，論理語，非論理語についても同様で，仮にそれらが非可算個存在する場合でも，ZFC の適当な非可算集合を用いて書き換えてやれば ZFC 集合論の枠組みに収まる。また，集合同士の演算等については ZFC に反するものは何一つ使ってこなかったので，いままでわれわれが集合として構成してきたもの，たとえば構造 $\boldsymbol{M}=\langle d, I\rangle$ の領域 d などは，すべて ZFC の集合と考えて問題ないのである。

さて，先にも述べたように，ZFC はそれ自身が数学的考察の対象となり得る。ZFC が整合的かどうかは不明であるが，ここでは暫定的に整合性を仮定し，その結果として何が起こるかを考えてみよう。ZFC の公理のうち，分出公理と置換公理は任意の $K_{\in}-$ 論理式を含むいわゆる公理シェーマ（axiom schema）といわれるもので，これらは無限個の公理を一つにまとめたものと考えられる。さて，$K_{\in}-$ 論理式の数は高々可算個なので ZFC は可算公理系であるといえる。すると，レーベンハイム・スコーレムの定理によって可算モデル $\boldsymbol{M}=\langle d, I\rangle$ が存在することになる。一方，「非可算個の集合が存在する」という命題は $K_{ZFC}-$ 文 ϕ へと形式化される。そして，よく知られているように ϕ は ZFC から演繹可能である。その結果，可算モデル $\boldsymbol{M}$ は ϕ を充足するので，可算集合 d の中に非可算個の集合が存在することになってしまう！　これが有名なスコーレムの背理である。

それではここで，なぜスコーレムの背理が生じてしまうのかを考えてみよう。自然数の集合 ω の唯一存在性は ZFC から演繹可能であり，ω に対応する新しい個体定数 ω を K_{ZFC} に付加することができるので，そのようにして得られた非論理語集合をあらためて K_{ZFC} と呼び，ZFC に ω の定義式を付加したものをあらためて ZFC と呼ぶことにする。「y は関数である」,「y は単射である」,「y の定義域は x である」,「y の値域は x である」に対応する $ZFC-$ 文を簡略化して Func$y$，Inj$y$，Donyx，Rngyx のように表すものとすると，「非可算集合が存在する」に対応する $K_{ZFC}-$ 文 ϕ は

$$\exists x \neg \exists y(\mathbf{Func}y \wedge(\mathbf{Inj}y \wedge(\mathbf{Dom}yx \wedge(\mathbf{Rng}yx \subset \omega))))$$

となる。以下では ω の解釈を ω^{I} で表す。可算モデル $\boldsymbol{M}=\langle d, I\rangle$ は ϕ を充足するので，「関数であり，単射であり，定義域が a であり，値域が ω^{I} の部分集合であるような $b\in d$ が存在しないような $a\in d$ が存在する」ということが $\boldsymbol{M}$ の意味で成り立つ。ここで重要なことは，集合が $\boldsymbol{M}$ の意味で，ある性質を持つからといって，その集合が $\boldsymbol{U}$ の中でも同じ性質を持つとは限らないということである。たとえば，$\boldsymbol{M}$ の意味で集合 c が集合 a の要素であるということは，$\in$ の解釈を $\in^{I}$ とするとき $c\in^{I}a$ となることだが，これは必ずしも $\boldsymbol{U}$ の中で $c\in a$ となることを意味しない。さらに，関数，単射，非順序対，自然数の集合などについても，$\boldsymbol{M}$ の意味でのものがそのまま $\boldsymbol{U}$ の意味でのものになるという保障はまったくないのである。

さて，$\boldsymbol{M}$ の意味での a の要素を集めると $\{c\in d \mid c\in^{I}a\}$ という，$\boldsymbol{U}$ の中での集合が得られる。これは $\boldsymbol{U}$ の中での可算集合 d の，$\boldsymbol{U}$ の中での部分集合なので，$\boldsymbol{U}$ の中での可算集合であるといえる。

このことは一見すると非可算個あるべきものが可算個しかないという矛盾を露呈しているように見えるが，実はそうではない。それは，$\boldsymbol{M}$ の意味での非可算集合 a を $\boldsymbol{U}$ の中で言わば「外側」から見たときに可算集合になっているということをいっているにすぎない。a は $\boldsymbol{M}$ の意味ではあくまでも非可算集合なのである。ここで次のことが明らかになる。スコーレムの背理は，可算モデル $\boldsymbol{M}=\langle d,\ I\rangle$ の意味での集合 a の性質と，a の要素を集めたもの $\{c\in d\,|\,c\in^{I}a\}$ が $\boldsymbol{U}$ に属するものとしてもつ性質を混同することから生じたものである。

さて，それではスコーレムの背理は単なる混同だったということで，連続無限集合は問題なく存在するものとしてよいのだろうか。確かに集合論の公理から連続無限集合の存在を証明することはできるのだが，同時に非存在が証明されてしまう可能性はないのだろうか。この問題は集合論の公理系の整合性（無矛盾性）に関わる問題である。そして，連続体経済という概念の導入を真に正当化できる方法があるとすれば，それは集合論の公理系の整合性を証明する以外に道はないだろう。ここで，有名なゲーデルの第二不完全性定理を紹介して，本稿の締めくくりにしたいと思う。

整合的な公理系の整合性を当の公理系から証明することは不可能である。

参考文献

Arrow, K. J. and Debreu, G. 1954. “Existence of Equilibrium for a Competitive Economy” *Econometrica*, 22, 265-290.

Aumann, R. J. 1964. “Markets with a Continuum of Traders” *Econometrica*, 32, 39-50.

Delvin, K. 1991. The Joy of Sets. Undergraduate Texts in Mathematics. New York, Springer-Verlag.

Ebbinghaus, H. -D. et. al. 1991. Mathematical Logic. Undergraduate Texts in Mathematics. New York, Springer-Verlag.

Kakutani, S. 1941. “A Generalization of Broouwer’s Fixed Point Theorem” *Duke Mathematical Journal*, 8, 416-427.

Hilbert, D. 1900. Mathematical Problems, Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris。

Skolem, T. 1941. “Sur la portee du theoreme de Lowenheim-Skolem.” *Les Entretiens de Zurich sur les fondements et la methode des sciences mathematiques*, (December 6-9, 1938), 25-52.

Walras, L. 1874. Eléments d’éonomie politique pure. Lausanne, Corbaz.

彌永昌吉，彌永健一『集合と位相Ｉ』，岩波講座　基礎数学　解析学(I) ｉ，岩波書店，1976 年。

角田　譲『数理論理学入門』，朝倉書店，1996 年。

G. カントール（功刀金二郎，村田　全訳・解説）『超限集合論』，現代数学の系譜８，共立出版，1979 年。

ブルバキ：数学史（村田　全，清水達雄訳），東京図書，1970 年。

E. T. ベル（田中　勇，銀林　浩訳）『数学をつくった人びと(IV)』，数学新書 31，東京図書，1960 年。

松本和夫『数理論理学』，共立出版，1969 年。

ワイルダー：数学基礎論序説（吉田洋一訳），培風館，1969 年。