最小絶対値法，最小自乗法，Chebyshev 基準に基づいた近似解の関連

尾　崎　雄一郎

1．はじめに

過剰決定の線形連立方程式の近似解を求める方法に各方程式の誤差の絶対値の和を最小にする最小絶対値法，誤差の自乗和を最小にする最小自乗法，誤差の絶対値の最大なものを最小にする Chebyshev 基準（ミニマックス法）などがある．最小絶対値法による近似問題はリニアー・プログラミングの問題に変換して解くことができ（Rabinowitz［27］, Rivlin［29］, pp. 78-9, Watson［33］, pp. 122-4, Zukhovitskiy and Avdeyeva［34］, pp. 215-21 など），Chebyshev 基準による近似問題もリニアー・プログラミングの問題に変換して解くことができる（Collatz and Wetterling［６］, pp. 256-67, Nef［20］, pp. 184-94, Rabinowitz［27］, Rice［28］, pp. 180-1, Stiefel［30］，［31］, Watson［33］, pp. 39-40, Zukhovitskiy and Avdeyeva［34］, pp. 190-207 など）．

変数の数 n より方程式の数が 1 つ多い Haar 条件を満たす $n+1$ 個の過剰決定の連立方程式の Chebyshev 基準による近似解は，これらの方程式によってできる n 次元単体の $n+1$ 個の頂点の各々を対応する最適な双対変数の値で加重平均したものに等しくなることを尾崎［22］が明らかにし，尾崎［23］は n 次元単体の（1 つを除く）n 個の頂点の座標から一部分ずつ取り出して形成される n 次元の点が Chebyshev 基準による近似解と一致するための条件を見出した．尾崎［25］は，最小自乗法による近似解は n 次元単体の $n+1$ 個の頂点の各々の座標を過剰決定の連立方程式の係数行列の一部分からなる n 次の $n+1$ 個の小行列式の各々によって加重平均した値に等しいことを明らかにし，また Chebyshev 基準による各方程式の誤差と符号が，最小自乗法による近似解の誤差によって定まるある値とそれらの符号に等しいという定理を Cheney［４］（pp. 41-2）とは別の方法で証明した．さらに，尾崎［24］は，２変数，３個の Haar 条件を満たす過剰決定の連立方程式において Chebyshev 基準による近似解がこれらの方程式によって定まる 2 次元単体の垂心や内心と一致するための条件を見出し，尾崎［26］は 2 変数の Chebyshev 近似問題を解く効率的な幾何学的方法を見出した．

この論文において方程式の数が変数の数より 1 つ多い Haar 条件を満たす過剰決定の線形連立方程式の最小絶対値法，最小自乗法，Chebyshev 基準による近似解，n 次元単体の重心の 4 つが一致するための条件（尾崎［21］を参照）とこれら 4 つの点が一直線上に並ぶための条件を明らかにする．

2．最小絶対値法——主問題の実行可能解

変数の数 n より方程式の数が 1 つ多い過剰決定の連立方程式を

$$a_{11}x_1 \quad + a_{12}x_2 + \quad \cdots \quad + a_{1n}x_n = b_1$$

$$
\begin{aligned}
a_{21}x_1 \quad &+ a_{22}x_2 + \ \cdots \ + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad &\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
a_{n+1,1}x_1 &+ a_{n+1,2}x_2 + \cdots + a_{n+1,n}x_n = b_{n+1}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

とする．(1) の i 番目の方程式に対する誤差 e_i を

$$e_i = b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) \qquad (i = 1, \cdots, n+1) \tag{2}$$

と定めると，(1) の最小絶対値法による近似解は，

$$\sum_{i=1}^{n+1} |e_i| \tag{3}$$

を最小にすることによって求められる．誤差 e_i は，正，負，ゼロいずれのこともあるから，

$$e_i = e_i^+ - e_i^-,\ e_i^+ \geqq 0,\ e_i^- \geqq 0 \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$

とすると，すべての i について e_i^+，e_i^- のうち少なくとも一方はゼロとすることができるので，

$$|e_i| = |e_i^+ - e_i^-| = e_i^+ + e_i^- \qquad (i = 1, \cdots, n+1) \tag{4}$$

と表すことができる．したがって，(3) を最小にする問題は，(2) と (4) より

$$\sum_{i=1}^{n+1} (e_i^+ + e_i^-) \tag{5}$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 \quad &+ a_{12}x_2 + \ \cdots \ + a_{1n}x_n \quad + e_1^+ - e_1^- = b_1 \\
a_{21}x_1 \quad &+ a_{22}x_2 + \ \cdots \ + a_{2n}x_n \quad + e_2^+ - e_2^- = b_2 \\
\vdots \qquad &\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{n+1,1}x_1 &+ a_{n+1,2}x_2 + \cdots + a_{n+1,n}x_n + e_{n+1}^+ - e_{n+1}^- = b_{n+1} \\
&e_i^+ \geqq 0,\quad e_i^- \geqq 0 \qquad (i = 1, \cdots, n+1)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

というリニアー・プログラミングの問題として表せる．

(1) から i 番目の方程式を除いた残りの連立方程式を

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1^{(i)} \quad &+ a_{12}x_2^{(i)} + \ \cdots \ + a_{1n}x_n^{(i)} = b_1 \\
\vdots \qquad &\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
a_{i-1,1}x_1^{(i)} &+ a_{i-1,2}x_2^{(i)} + \cdots + a_{i-1,n}x_n^{(i)} = b_{i-1} \\
a_{i+1,1}x_1^{(i)} &+ a_{i+1,2}x_2^{(i)} + \cdots + a_{i+1,n}x_n^{(i)} = b_{i+1} \\
\vdots \qquad &\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
a_{n+1,1}x_1^{(i)} &+ a_{n+1,2}x_2^{(i)} + \cdots + a_{n+1,n}x_n^{(i)} = b_{n+1}
\end{aligned}
\qquad (i = 1, \cdots, n+1)
\tag{7}
$$

と表す．ここで，$x_j^{(i)}$ は (7) の解を表す．(7) の係数からなる行列式を D_i とし，

$$
D_i = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n}
\end{vmatrix} \neq 0 \qquad (i = 1, \cdots, n+1)
\tag{8}
$$

と仮定する (Haar 条件)．さらに (8) からその第 h 行，第 j 列を除いた小行列式を $D_i(h, j)$ と表す．このとき，次の補助定理 1 が成立する．

補助定理１．任意の $i=1,\cdots,n+1\,;h,\ j=1,\cdots,n$ に対して

$$D_i(h,\ j)=\begin{cases}D_h(i-1,\ j) & (h<i\text{であるとき})\\ D_{h+1}(i,\ j) & (h\geqq i\text{であるとき})\end{cases}\tag{9}$$

が成立する．

証明．(8) より任意の j に対して

$$D_1(h,\ j)=D_{h+1}(1,\ j)\qquad (h=1,\cdots,n)$$

$$D_2(h,\ j)=\begin{cases}D_h(1,\ j) & (h=1)\\ D_{h+1}(2,\ j) & (h=2,\cdots,n)\end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_n(h,\ j)=\begin{cases}D_h(n-1,\ j) & (h=1,\cdots,n-1)\\ D_{h+1}(n,\ j) & (h=n)\end{cases}$$

$$D_{n+1}(h,\ j)=D_h(n,\ j)\qquad (h=1,\cdots,n)$$

であるから，これらより(9)が成立する．　□

(7) を Cramer のルールを用いて解くと，任意の j について

$$x_j^{(i)}=\frac{1}{D_i}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & b_{i-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n}\\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & b_{i+1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,j-1} & b_{n+1} & a_{n+1,j+1} & \cdots & a_{n+1,n}\end{vmatrix}$$

となり，この行列式を第 j 列で展開すると，

$$x_j^{(i)}=\frac{1}{D_i}\left[\sum_{h=1}^{i-1}(-1)^{h+j}b_hD_i(h,\ j)+\sum_{h=i}^{n}(-1)^{h+j}b_{h+1}D_i(h,\ j)\right]\quad (i=1,\cdots,n+1\,;j=1,\cdots,n)\tag{10}$$

となる．(10) は過剰決定の連立方程式 (1) によってできる n 次元単体の $n+1$ 個の頂点の座標を表す．(10) を用いて (1) から除かれた i 番目の方程式の左辺の値を計算すると，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(i)}=&\frac{a_{i1}}{D_i}\left[\sum_{h=1}^{i-1}(-1)^{h+1}b_hD_i(h,\ 1)+\sum_{h=i}^{n}(-1)^{h+1}b_{h+1}D_i(h,\ 1)\right]\\ &+\frac{a_{i2}}{D_i}\left[\sum_{h=1}^{i-1}(-1)^{h+2}b_hD_i(h,\ 2)+\sum_{h=i}^{n}(-1)^{h+2}b_{h+1}D_i(h,\ 2)\right]\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+\frac{a_{in}}{D_i}\left[\sum_{h=1}^{i-1}(-1)^{h+n}b_hD_i(h,\ n)+\sum_{h=i}^{n}(-1)^{h+n}b_{h+1}D_i(h,\ n)\right]\end{aligned}$$

となる．この式を補助定理１の (9) を用いて書き換えると，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(i)}=&\frac{a_{i1}}{D_i}\left[\sum_{h=1}^{i-1}(-1)^{h+1}b_hD_h(i-1,\ 1)+\sum_{h=i}^{n}(-1)^{h+1}b_{h+1}D_{h+1}(i,\ 1)\right]\\ &+\frac{a_{i2}}{D_i}\left[\sum_{h=1}^{i-1}(-1)^{h+2}b_hD_h(i-1,\ 2)+\sum_{h=i}^{n}(-1)^{h+2}b_{h+1}D_{h+1}(i,\ 2)\right]\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$+\frac{a_{in}}{D_i}\left[\sum_{h=1}^{i-1}(-1)^{h+n}b_hD_h(i-1,\ n)+\sum_{h=i}^{n}(-1)^{h+n}b_{h+1}D_{h+1}(i,\ n)\right]$$

となり，この式を b_i ごとにまとめると，

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(i)}=\frac{b_1}{D_i}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{ij}D_1(i-1,\ j)+\cdots+\frac{b_{i-1}}{D_i}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i-1+j}a_{ij}D_{i-1}(i-1,\ j)$$
$$+\frac{b_{i+1}}{D_i}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}D_{i+1}(i,\ j)+\cdots+\frac{b_{n+1}}{D_i}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}a_{ij}D_{n+1}(i,\ j)$$

となる．この各項の符号を調整すると，

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(i)}=\frac{(-1)^{2-i}b_1}{D_i}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i-1+j}a_{ij}D_1(i-1,\ j)+\frac{(-1)^{3-i}b_2}{D_i}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i-1+j}a_{ij}D_2(i-1,\ j)$$
$$+\cdots+\frac{b_{i-1}}{D_i}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i-1+j}a_{ij}D_{i-1}(i-1,\ j) \tag{11}$$
$$+\frac{b_{i+1}}{D_i}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}D_{i+1}(i,\ j)+\cdots+\frac{(-1)^{n-i}b_{n+1}}{D_i}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}D_{n+1}(i,\ j)$$

と表せる．ここで，次の補助定理2を利用する．

補助定理２．(8) の D_i を $(a_{k1},\ a_{k2},\cdots,\ a_{kn})$ 行で展開すると，

$$D_i=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}D_i(k,\ j) & (k=1,\cdots,i-1)\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k-1+j}a_{kj}D_i(k-1,\ j) & (k=i+1,\cdots,\ n+1)\end{cases} \tag{12}$$

となる．

証明．(8) の D_i をその各行で展開すると，

$$D_1=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k-1+j}a_{kj}D_1(k-1,\ j) \qquad (k=2,\cdots,\ n+1)$$

$$D_2=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}D_2(k,\ j) & (k=1)\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k-1+j}a_{kj}D_2(k-1,\ j) & (k=3,\cdots,\ n+1)\end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_{n+1}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}D_{n+1}(k,\ j) \qquad (k=1,\cdots,\ n)$$

となるので，これより (12) をえる．□

(11) は補助定理2の (12) を用いると，

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(i)}=\frac{1}{D_i}\Big[(-1)^{2-i}b_1D_1+(-1)^{3-i}b_2D_2+\cdots+b_{i-1}D_{i-1}+b_{i+1}D_{i+1}+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1-i}b_nD_n+(-1)^{n-i}b_{n+1}D_{n+1}\Big]$$

と表せ，この式の右辺に $(-1)^{2i}=1$ を掛けて整理すると，

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(i)}=\frac{1}{D_i}\left[\sum_{h=1}^{i-1}(-1)^{i+1+h}b_hD_h+\sum_{h=i+1}^{n+1}(-1)^{i+1+h}b_hD_h\right]\quad(i=1,\cdots,\ n+1) \tag{13}$$

と表せる．

以下において(1)の係数の間に正の θ に対して

(14)
$$a_{n+1,j}=\theta\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\qquad(j=1,\cdots,n)$$

という関係が成立すると仮定する．

補助定理３．(14)が成立するならば，

(15)
$$D_i=(-1)^{n-i}\theta D_{n+1}\qquad(i=1,\cdots,n)$$

が成立する．

証明．(8)の D_i に(14)を代入すると，行列式の性質より

$$D_i=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{i-1,1}&a_{i-1,2}&\cdots&a_{i-1,n}\\ a_{i+1,1}&a_{i+1,2}&\cdots&a_{i+1,n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\\ a_{n+1,1}&a_{n+1,2}&\cdots&a_{n+1,n}\end{vmatrix}=\theta\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{i-1,1}&a_{i-1,2}&\cdots&a_{i-1,n}\\ a_{i+1,1}&a_{i+1,2}&\cdots&a_{i+1,n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\\ \sum_{k=1}^{n}a_{k1}&\sum_{k=1}^{n}a_{k2}&\cdots&\sum_{k=1}^{n}a_{kn}\end{vmatrix}$$

$$=\theta\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{i-1,1}&a_{i-1,2}&\cdots&a_{i-1,n}\\ a_{i+1,1}&a_{i+1,2}&\cdots&a_{i+1,n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\\ a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\end{vmatrix}=(-1)^{n-i}\theta\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{i-1,1}&a_{i-1,2}&\cdots&a_{i-1,n}\\ a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\ a_{i+1,1}&a_{i+1,2}&\cdots&a_{i+1,n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

となるから，これと(8)より(15)をえる．　□

(10)で与えられた $x_j^{(i)}$ に対する(2)の i 番目の式の誤差は，(13)を用いて

$$\begin{aligned}e_i&=b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(i)}\\&=b_i-\frac{1}{D_i}\left[\sum_{h=1}^{i-1}(-1)^{i+1+h}b_hD_h+\sum_{h=i+1}^{n+1}(-1)^{i+1+h}b_hD_h\right]\\&=\frac{1}{D_i}\left[\sum_{h=1}^{i}(-1)^{i+h}b_hD_h+\sum_{h=i+1}^{n+1}(-1)^{i+h}b_hD_h\right]\end{aligned}$$

と表せる．この式に補助定理３の(15)を用いて整理すると，

$$\begin{aligned}e_i=\frac{1}{(-1)^{n-i}\theta D_{n+1}}\Bigg[&\sum_{h=1}^{i}(-1)^{i+h}b_h(-1)^{n-h}\theta D_{n+1}+\sum_{h=i+1}^{n}(-1)^{i+h}b_h(-1)^{n-h}\theta D_{n+1}\\&+(-1)^{i+n+1}b_{n+1}D_{n+1}\Bigg]=\sum_{h=1}^{n}b_h-\frac{b_{n+1}}{\theta}\qquad(i=1,\cdots,n)\end{aligned}$$

となり，

$$e_{n+1}=\frac{1}{D_{n+1}}\left[\sum_{h=1}^{n}(-1)^{n+1+h}b_h(-1)^{n-h}\theta D_{n+1}+(-1)^{2n+2}b_{n+1}D_{n+1}\right]=b_{n+1}-\theta\sum_{h=1}^{n}b_h$$

となる．以上の結果をまとめると，次のようになる．

補助定理４． (10) で示される n 次元単体の n 個の頂点

$$x_1^{(i)},\ x_2^{(i)},\ \cdots,\ x_n^{(i)} \qquad (i=1,\cdots,n)$$

とこれらの頂点の各々に対して定まる誤差

(16–1) $$e_i=\sum_{k=1}^{n}b_k-\frac{b_{n+1}}{\theta},\ e_1=\cdots=e_{i-1}=e_{i+1}=\cdots=e_{n+1}=0 \qquad (i=1,\cdots,n)$$

並びに (10) で示される n 次元単体の頂点

$$x_1^{(n+1)},\ x_2^{(n+1)},\ \cdots,\ x_n^{(n+1)}$$

とこの頂点に対して定まる誤差

(16–2) $$e_{n+1}=b_{n+1}-\theta\sum_{k=1}^{n}b_k,\qquad e_1=\cdots=e_n=0$$

は主問題 (5)−(6) の実行可能解である．

証明． (10) の $x_j^{(i)}$ は (7) の n 個の式を満たす解であるから，これらの $x_j^{(i)}$ に対する制約条件 (6) の n 個の式における $e_i=e_i^+-e_i^-$ はすべてゼロであり，またこれらの $x_j^{(i)}$ に対する (6) の残り 1 つの方程式の e_i は (16–1) あるいは (16–2) であり，したがって結論をえる．　□

次に，(14) における θ を

(17) $$0<\theta<1$$

(18) $$\theta=1$$

(19) $$\theta>1$$

という場合に分け，さらに (1) が過剰決定であることと (14) に注意すると，

$$\theta\sum_{k=1}^{n}b_k\neq b_{n+1}$$

であるから，

(20) $$\theta\sum_{k=1}^{n}b_k>b_{n+1}$$

(21) $$\theta\sum_{k=1}^{n}b_k<b_{n+1}$$

という 2 つの場合に分けて考察する．

補助定理５． (17) が成立すると仮定する．このとき，(20) が成立するならば，(16) の e_i の間に

(22–1) $$e_i=\sum_{k=1}^{n}b_k-\frac{b_{n+1}}{\theta}>\theta\sum_{k=1}^{n}b_k-b_{n+1}=-e_{n+1}>0 \qquad (i=1,\cdots,n)$$

という関係が成立し，(21) が成立するならば，

(22–2) $$-e_i=\frac{b_{n+1}}{\theta}-\sum_{k=1}^{n}b_k>b_{n+1}-\theta\sum_{k=1}^{n}b_k=e_{n+1}>0 \qquad (i=1,\cdots,n)$$

という関係が成立する．

証明．(20) が成立するならば，(16) の e_i は

$$e_i > 0 \quad (i = 1, \cdots, n), \qquad e_{n+1} < 0$$

であるから，(16)，(17)，(20) より

$$e_i - (-e_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} b_k - \frac{b_{n+1}}{\theta} + b_{n+1} - \theta\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{(1-\theta)}{\theta}(\theta\sum_{k=1}^{n} b_k - b_{n+1}) > 0$$

となるから，これより (22-1) をえる．同様に，(21) が成立するならば，

$$e_i < 0 \quad (i=1, \cdots, n), \qquad e_{n+1} > 0$$

であるから，(16)，(17)，(21) より

$$(-e_i) - e_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{\theta} - \sum_{k=1}^{n} b_k - (b_{n+1} - \theta\sum_{k=1}^{n} b_k) = \frac{(1-\theta)}{\theta}(b_{n+1} - \theta\sum_{k=1}^{n} b_k) > 0$$

となり，これより (22－2) をえる．　□

補助定理６．(18) が成立すると仮定する．このとき，(20) が成立するならば，

(23-1)　$$e_i = \sum_{k=1}^{n} b_k - b_{n+1} = -e_{n+1} > 0 \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

という関係が成立し，(21) が成立するならば，

(23-2)　$$-e_i = b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} b_k = e_{n+1} > 0 \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

という関係が成立する．

証明．(20) が成立するならば，(16) の e_i は

$$e_i > 0 \quad (i = 1, \cdots, n), \qquad e_{n+1} < 0$$

であるから，(16) より (23-1) が成立し，(21) が成立するならば，

$$e_i < 0 \quad (i = 1, \cdots, n), \qquad e_{n+1} > 0$$

であるから，(16) より (23-2) をえる．　□

補助定理７．(19) が成立すると仮定する．このとき，(20) が成立するならば，

(24-1)　$$0 < e_i = \sum_{k=1}^{n} b_k - \frac{b_{n+1}}{\theta} < \theta\sum_{k=1}^{n} b_k - b_{n+1} = -e_{n+1} \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

という関係が成立し，(21) が成立するならば，

(24-2)　$$0 < -e_i = \frac{b_{n+1}}{\theta} - \sum_{k=1}^{n} b_k < b_{n+1} - \theta\sum_{k=1}^{n} b_k = e_{n+1} \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

という関係が成立する．

証明．(20) が成立するとき，(16) の e_i は

$$e_i > 0 \quad (i = 1, \cdots, n), \qquad e_{n+1} < 0$$

であるから，(16)，(19)，(20) より

$$-e_{n+1} - e_i = -b_{n+1} + \theta\sum_{k=1}^{n} b_k - (\sum_{k=1}^{n} b_k - \frac{b_{n+1}}{\theta}) = \frac{(\theta-1)}{\theta}(\theta\sum_{k=1}^{n} b_k - b_{n+1}) > 0$$

となり，これより (24-1) をえる．同様に，(21) が成立するとき，

$$e_i < 0 \quad (i = 1, \cdots, n), \qquad e_{n+1} > 0$$

であるから，(16)，(19)，(21) より

$$e_{n+1}-(-e_i)=b_{n+1}-\theta\sum_{k=1}^{n}b_k+\sum_{k=1}^{n}b_k-\frac{b_{n+1}}{\theta}=\frac{(\theta-1)}{\theta}(b_{n+1}-\theta\sum_{k=1}^{n}b_k)>0$$

となり，これより (24-2) をえる． □

３．最小絶対値法——双対問題の実行可能解

主問題 (5)−(6) の双対問題は，

(25)
$$\sum_{i=1}^{n+1}b_iy_i$$

を次の制約条件の下で最大にする

(26)
$$\begin{aligned}
a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{n+1,1}y_{n+1}&=0\\
a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{n+1,2}y_{n+1}&=0\\
\vdots\qquad\ \ \vdots\qquad\qquad\quad \vdots\qquad\ &\ \vdots\\
a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{n+1,n}y_{n+1}&=0\\
-1\leqq y_i\leqq 1\qquad (i=1,\cdots,\ n&+1)
\end{aligned}$$

と表せる．

補助定理８．(17) が成立するものとする．このとき，(20) が成立するならば，

(27-1)
$$y_i=\theta\quad (i=1,\cdots,\ n),\qquad y_{n+1}=-1$$

は双対問題 (25)−(26) の実行可能解で，目的関数 (25) の値は

(28-1)
$$\sum_{i=1}^{n+1}b_iy_i=\theta\sum_{k=1}^{n}b_k-b_{n+1}>0$$

であり，(21) が成立するならば，

(27-2)
$$y_i=-\theta\quad (i=1,\cdots,\ n),\qquad y_{n+1}=1$$

が双対問題の実行可能解で，目的関数の値は

(28-2)
$$\sum_{i=1}^{n+1}b_iy_i=b_{n+1}-\theta\sum_{k=1}^{n}>0$$

である．

証明．(14) と (17) に注意すると，(27) が双対問題の実行可能解で，これらの実行可能解に対する目的関数の値が (28) であることは直ちにわかる． □

補助定理９．(18) が成立するものとする．このとき，(20) が成立するならば，

(29-1)
$$y_i=1\quad (i=1,\cdots,\ n),\qquad y_{n+1}=-1$$

は双対問題 (25)−(26) の実行可能解で，目的関数 (25) の値は，

(30-1)
$$\sum_{i=1}^{n+1}b_iy_i=\sum_{k=1}^{n}b_k-b_{n+1}>0$$

であり，(21) が成立するならば，

(29-2)
$$y_i=-1\quad (i=1,\cdots,\ n),\qquad y_{n+1}=1$$

が双対問題の実行可能解で，目的関数の値は

(30−2) $$\sum_{i=1}^{n+1} b_i y_i = b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} b_k > 0$$

である．

証明．(14) と (18) より (29) が双対問題の実行可能解で，目的関数の値は (30) で与えられることがわかる． □

補助定理 10．(19) が成立するものとする．このとき，(20) が成立するならば，

(31−1) $$y_i = 1 \quad (i = 1, \cdots, n), \qquad y_{n+1} = -1/\theta$$

は双対問題 (25)−(26) の実行可能解で，目的関数 (25) の値は，

(32−1) $$\sum_{i=1}^{n+1} b_i y_i = \sum_{k=1}^{n} b_k - b_{n+1}/\theta > 0$$

であり，(21) が成立するならば，

(31−2) $$y_i = -1 \quad (i = 1, \cdots, n), \qquad y_{n+1} = 1/\theta$$

が双対問題の実行可能解で，目的関数の値は

(32−2) $$\sum_{i=1}^{n+1} b_i y_i = (b_{n+1}/\theta) - \sum_{k=1}^{n} b_k > 0$$

である．

証明．(14) と (19) より結論をえる． □

４．最小絶対値法の最適解

定理１．(14) において

(17) $$0 < \theta < 1$$

であるとする．このとき，最小絶対値法の主問題 (5)−(6) の最適解は，

$$x_j^{(n+1)} = \frac{1}{D_{n+1}} \sum_{h=1}^{n} (-1)^{j+h} b_h D_{n+1}(h, j) \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

$$e_i^+ = e_i^- = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

(33) $$e_{n+1}^+ = \begin{cases} 0 & \text{(20)が成立するとき} \\ b_{n+1} - \theta \sum_{k=1}^{n} b_k > 0 & \text{(21)が成立するとき} \end{cases}$$

$$e_{n+1}^- = \begin{cases} \theta \sum_{k=1}^{n} b_k - b_{n+1} > 0 & \text{(20)が成立するとき} \\ 0 & \text{(21)が成立するとき} \end{cases}$$

であり，双対問題 (25)−(26) の最適解は，(20) が成立するとき，

(27−1) $$y_i = \theta \qquad (i = 1, \cdots, n), \qquad y_{n+1} = -1$$

であり，(21) が成立するとき，

(27−2) $$y_i = -\theta \quad (i = 1, \cdots, n), \qquad y_{n+1} = 1$$

である．

この場合，主問題の最適解は一意である．

証明． (33) が主問題の実行可能解であることは補助定理4で示した．最小化の主問題の目的関数 (5) の値は，(20) が成立するとき，補助定理5の (22-1) より

$$\sum_{i=1}^{n+1}(e_i^+ + e_i^-) = e_{n+1}^- = \theta\sum_{k=1}^{n} b_k - b_{n+1} > 0$$

であり，(21) が成立するとき，(22－2) より

$$\sum_{i=1}^{n+1}(e_i^+ + e_i^-) = e_{n+1}^+ = b_{n+1} - \theta\sum_{k=1}^{n} b_k > 0$$

である．他方，(17) と (20) が成立するとき，補助定理8より (27-1) が双対問題の実行可能解で，目的関数 (25) の値は (28-1) より

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i y_i = \theta\sum_{k=1}^{n} b_k - b_{n+1} > 0$$

であり，(17) と (21) が成立するとき，(27-2) が双対問題の実行可能解で，目的関数の値は (28－2) より

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i y_i = b_{n+1} - \theta\sum_{k=1}^{n} b_k > 0$$

である．主問題の実行可能解に対する目的関数 (5) の値と双対問題の実行可能解に対する目的関数 (25) の値が等しいので，双対定理（Bertsimas and Tsitsiklis［２］, p. 148, Collatz and Wetterling［６］, p. 92, Cooper and Steinberg［７］, pp. 162-4, Gale［10］, pp. 10-1, Hadley［14］, p. 228, Krekó［17］, p. 193, Murty［19］, p. 193 など）により (33) が主問題の，(27) が双対問題の最適解である．

次に，双対問題の制約条件 (26) の不等式をスラック変数 s_i と t_i を用いて書き表すと，(26) は

(26′)
$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} y_i = 0 \quad (j = 1, \cdots, n), \ -y_i + s_i = 1, \ y_i + t_i = 1 \quad (i = 1, \cdots, n+1)$$

となり，(26′) には全部で $3n + 2$ 個の方程式がある．(27-1)，(27-2) で表される双対問題の最適解において $n + 1$ 個の y_i がゼロではなく，(イ) $y_{n+1} = -1$ あるいは (ロ) $y_{n+1} = 1$ であるから，(17) より (イ) の場合 (26′) の n 個の s_i と $n + 1$ 個の t_i が正であり，(ロ) の場合 $n + 1$ 個の s_i と n 個の t_i が正である．これらいずれの場合にも最適解において $3n + 2$ 個の双対変数がゼロではないから，双対問題の最適解は退化しておらず，主問題の最適解は一意である（Chvátal［５］, p. 65, Dantzig and Thapa［８］, p. 73, Murty［19］, p. 140）．　□

定理1の最小絶対値法による近似解 (33) は，(14) と (17) が成立する場合，過剰決定の連立方程式 (1) によってできる n 次元単体の $n + 1$ 個の頂点の中で，(1) の $n + 1$ 番目の方程式を除いたときの頂点に一致する．

定理2． (14) において

(18)
$$\theta = 1$$

であるとする．(20) が成立するとき，主問題 (5)－(6) の最適解は多重解で，

(34-1)
$$x_j^{(i)} = \frac{1}{D_i}\left[\sum_{h=1}^{i-1}(-1)^{j+h} b_h D_i(h, j) + \sum_{h=i}^{n}(-1)^{j+h} b_{h+1} D_i(h, j)\right] \quad (i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots n)$$

$$e_i^+ = \sum_{k=1}^{n} b_k - b_{n+1} > 0 \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

（他の e_i^+，e_i^- はすべてゼロ）と，

(34-2)
$$x_j^{(n+1)} = \frac{1}{D_{n+1}} \sum_{h=1}^{n} (-1)^{j+h} b_h D_{n+1}(h, j) \qquad (j = 1, \cdots, n)$$
$$e_{n+1}^- = \sum_{k=1}^{n} b_k - b_{n+1} > 0$$

（他の e_i^+，e_i^- はすべてゼロ）であり，双対問題 (25)−(26) の最適解は，

(29-1)
$$y_i = 1 \quad (i = 1, \cdots, n), \qquad y_{n+1} = -1$$

である．

(21) が成立するとき，主問題 (5)−(6) の最適解は，

(35-1)
$$x_j^{(i)} = \frac{1}{D_i}\left[\sum_{h=1}^{i-1} (-1)^{j+h} b_h D_i(h, j) + \sum_{h=i}^{n} (-1)^{j+h} b_{h+1} D_i(h, j)\right] \quad (i = 1, \cdots n ; j = 1, \cdots, n)$$
$$e_i^- = b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} b_k > 0 \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

（他の e_i^+，e_i^- はすべてゼロ）と，

(35-2)
$$x_j^{(n+1)} = \frac{1}{D_{n+1}} \sum_{h=1}^{n} (-1)^{j+h} b_h D_{n+1}(h, j) \qquad (j = 1, \cdots, n)$$
$$e_{n+1}^+ = b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} b_k > 0$$

（他の e_i^+，e_i^- はすべてゼロ）であり，双対問題 (25)−(26) の最適解は，

(29-2)
$$y_i = -1 \quad (i = 1, \cdots, n), \qquad y_{n+1} = 1$$

である．

証明． 補助定理 4 より (10) に基づく (34)，(35) は主問題の実行可能解である．補助定理 6 より主問題の目的関数の値は，(20) が成立するとき，(34) より

$$\sum_{i=1}^{n+1} (e_i^+ + e_i^-) = \sum_{k=1}^{n} b_k - b_{n+1} > 0$$

であり，(21) が成立するとき，

$$\sum_{i=1}^{n+1} (e_i^+ + e_i^-) = b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} b_k > 0$$

である．他方，補助定理 9 より (20) が成立するならば，(29-1) が双対問題の実行可能解で，このとき目的関数 (25) の値は，

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i y_i = \sum_{k=1}^{n} b_k - b_{n+1} > 0$$

であり，(21) が成立するならば，(29-2) が双対問題の実行可能解で，このとき目的関数の値は，

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i y_i = b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} b_k > 0$$

である．以上より主問題の実行可能解に対する目的関数 (5) の値と双対問題の実行可能解に対する目的関数 (25) の値が等しいので，双対定理により (34) と (35) の実行可能解は最適解である．□

(18) が成立するとき，定理 2 の (34) と (35) で示される最小絶対値法による $n+1$ 個の最適解は，

(1) によって形成される n 次元単体の $n+1$ 個の頂点の各々と一致する．リニアー・プログラミングの問題の最適解が多重解であるとき，すべての最適な端点解の凸 1 次結合も最適解であるから，(1) によって形成される $n+1$ 個の頂点と単体の内部の点もすべて最適解である．

定理 3． (14) において

(19)
$$\theta > 1$$
であるとする．(20) が成立するとき，主問題 (5)−(6) の最適解は多重解で，

(36-1)
$$x_j^{(i)} = \frac{1}{D_i}\left[\sum_{h=1}^{i-1}(-1)^{j+h}b_h D_i(h,\ j) + \sum_{h=i}^{n}(-1)^{j+h}b_{h+1}D_i(h,\ j)\right] \quad (i=1,\cdots,\ n\ ;\ j=1,\cdots,\ n)$$
$$e_i^+ = \sum_{k=1}^{n} b_k - \frac{b_{n+1}}{\theta} > 0 \qquad (i=1,\cdots,\ n)$$
(他の e_i^+，e_i^- はすべてゼロ) であり，双対問題 (25)−(26) の最適解は，

(31-1)
$$y_i = 1 \quad (i=1,\cdots,\ n), \qquad y_{n+1} = -1/\theta$$
である．

(21) が成立するとき，主問題 (5)−(6) の最適解は多重解で，

(36-2)
$$x_j^{(i)} = \frac{1}{D_i}\left[\sum_{h=1}^{i-1}(-1)^{j+h}b_h D_i(h,\ j) + \sum_{h=i}^{n}(-1)^{j+h}b_{h+1}D_i(h,\ j)\right] \quad (i=1,\cdots,\ n\ ;\ j=1,\cdots,\ n)$$
$$e_i^- = \frac{b_{n+1}}{\theta} - \sum_{k=1}^{n} b_k > 0 \qquad (i=1,\cdots,\ n)$$
(他の e_i^+，e_i^- はすべてゼロ) であり，双対問題 (25)−(26) の最適解は，

(31-2)
$$y_i = -1 \quad (i=1,\cdots,\ n), \qquad y_{n+1} = 1/\theta$$
である．

証明． 補助定理 4 より (10) に基づく (36) は主問題の実行可能解である．補助定理 7 に注意すると，主問題の目的関数 (5) の値は，(20) が成立するとき，
$$\sum_{k=1}^{n+1}(e_k^+ + e_k^-) = e_i^+ = \sum_{k=1}^{n} b_k - \frac{b_{n+1}}{\theta} > 0 \qquad (i=1,\cdots,\ n)$$
であり，(21) が成立するとき，
$$\sum_{k=1}^{n+1}(e_k^+ + e_k^-) = e_i^- = \frac{b_{n+1}}{\theta} - \sum_{k=1}^{n} b_k > 0 \qquad (i=1,\cdots,\ n)$$
である．他方，補助定理 10 より (20) が成立するとき，(31-1) が双対問題の実行可能解で，このとき目的関数 (25) の値は，
$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i y_i = \sum_{k=1}^{n} b_k - \frac{b_{n+1}}{\theta} > 0$$
であり，(21) が成立するとき，(31-2) が双対問題の実行可能解で，目的関数 (25) の値は，
$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i y_i = \frac{b_{n+1}}{\theta} - \sum_{k=1}^{n} b_k > 0$$
である．主問題の実行可能解に対する目的関数 (5) の値と双対問題の実行可能解に対する目的関数 (25) の値が等しいので，双対定理により (36) が主問題の (31) が双対問題の最適解である．　□

(19) が成立するとき，定理３の (36-1) あるいは (36-2) で示される最適解は，(1) の連立方程式によってできる n 次元単体の $n+1$ 個の頂点のうち，１番目から n 番目までの方程式を順次１つずつ除いてできる n 個の頂点の各々に一致する．これら n 個の頂点の凸１次結合も最適解である．

５．最小自乗近似

(1) の最小自乗法による近似解は，(2) の誤差の自乗和

$$\sum_{i=1}^{n+1} e_i^2$$

を最小にすることによって求められる．したがって，最小化の条件

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \sum_{i=1}^{n+1} e_i^2}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n+1} e_i \frac{\partial e_i}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n+1} e_i(-a_{ij}) = 0 \qquad (j=1, \cdots, n)$$

によってえられる正規方程式

$$\begin{array}{l} \sum a_{i1}^2 x_1 + \sum a_{i1}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum a_{i1}a_{in}x_n = \sum a_{i1}b_i \\ \sum a_{i2}a_{i1}x_1 + \sum a_{i2}^2 x_2 + \cdots + \sum a_{i2}a_{in}x_n = \sum a_{i2}b_i \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \sum a_{in}a_{i1}x_1 + \sum a_{in}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum a_{in}^2 x_n = \sum a_{in}b_i \end{array} \tag{37}$$

の解が最小自乗法による近似解である．(37) の係数は

$$\begin{bmatrix} \sum a_{i1}^2 & \sum a_{i1}a_{i2} & \cdots & \sum a_{i1}a_{in} \\ \sum a_{i2}a_{i1} & \sum a_{i2}^2 & \cdots & \sum a_{i2}a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum a_{in}a_{i1} & \sum a_{in}a_{i2} & \cdots & \sum a_{in}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n+1,1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n+1,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n+1,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{bmatrix} \tag{38}$$

と表せる．(38) の左辺の行列式を M とし，右辺の行列式を計算するために Binet-Cauchy 定理 (Aitken［１］, pp. 98-9, Browne［３］, pp. 24-5, Ferrar［９］, pp. 50-1, Gantmacher［11］, pp. 8-11, Hadley［13］, pp. 100-3, Hohn［15］, pp. 268-70, Horn and Johnson［16］, p. 22, Lancaster and Tismenetsky ［18］, pp. 39-41, Thrall and Tornheim［32］, pp. 127-8 など) を適用し，補助定理３の (15) を用いると，

$$M = \begin{vmatrix} \sum a_{i1}^2 & \sum a_{i1}a_{i2} & \cdots & \sum a_{i1}a_{in} \\ \sum a_{i2}a_{i1} & \sum a_{i2}^2 & \cdots & \sum a_{i2}a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum a_{in}a_{i1} & \sum a_{in}a_{i2} & \cdots & \sum a_{in}^2 \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n+1} D_k^2 = (n\theta^2+1)D_{n+1}^2 \tag{39}$$

となる．他方，

$$
(40)\quad
\begin{bmatrix}
\sum a_{i1}^2 & \cdots & \sum a_{i1}a_{i,j-1} & \sum a_{i1}b_i & \sum a_{i1}a_{i,j+1} & \cdots & \sum a_{i1}a_{in} \\
\sum a_{i2}a_{i1} & \cdots & \sum a_{i2}a_{i,j-1} & \sum a_{i2}b_i & \sum a_{i2}a_{i,j+1} & \cdots & \sum a_{i2}a_{in} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\sum a_{in}a_{i1} & \cdots & \sum a_{in}a_{i,j-1} & \sum a_{in}b_i & \sum a_{in}a_{i,j+1} & \cdots & \sum a_{in}^2
\end{bmatrix}
$$
$$
=\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n+1,1} \\
a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n+1,2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n+1,n}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,j-1} & b_{n+1} & a_{n+1,j+1} & \cdots & a_{n+1,n}
\end{bmatrix}
$$

であるから，(40) の右辺の行列式に Binet-Cauchy 定理を適用し，(8) を用いると，

$$
\begin{aligned}
&D_1\sum_{h=1}^{n}(-1)^{j+h}b_{h+1}D_1(h,\ j)\\
&\quad + D_2[(-1)^{1+j}b_1D_2(1,\ j)+\sum_{h=2}^{n}(-1)^{j+h}b_{h+1}D_2(h,\ j)]+\cdots\\
&\quad + D_{n+1}\sum_{h=1}^{n}(-1)^{j+h}b_hD_{n+1}(h,\ j)
\end{aligned}
$$

となり，これを b_i ごとにまとめると，(40) の右辺の行列式は，

$$
(41)\quad
\begin{aligned}
&[(-1)^{1+j}\sum_{i=2}^{n+1}D_i\cdot D_i(1,\ j)]b_1\\
&\quad +[(-1)^{1+j}D_1\cdot D_1(1,\ j)+(-1)^{2+j}\sum_{i=3}^{n+1}D_i\cdot D_i(2,\ j)]b_2+\cdots\\
&\quad +[(-1)^{n+j}\sum_{i=1}^{n}D_i\cdot D_i(n,\ j)]b_{n+1}
\end{aligned}
$$

と表せる．

(37) の解を $\hat{x}_j$ とすると，次の定理をえる．

定理 4．(14) が成立するとき，(1) の最小自乗法による近似解は，

$$
(42)\quad \hat{x}_j=\frac{1}{(n\theta^2+1)}\left[\theta^2\sum_{i=1}^{n}x_j^{(i)}+x_j^{(n+1)}\right]\qquad (j=1,\cdots,\ n)
$$

である．

証明．(37) を Cramer のルールを用いて解くと，(39)，(40)，(41)より

$$
(43)\quad
\begin{aligned}
\hat{x}_j=\frac{1}{(n\theta^2+1)D_{n+1}^2}&\Biggl\{\Bigl[(-1)^{1+j}\sum_{i=2}^{n+1}D_i\cdot D_i(1,\ j)\Bigr]b_1\\
&+\Bigl[(-1)^{1+j}D_1\cdot D_1(1,\ j)+(-1)^{2+j}\sum_{i=3}^{n+1}D_i\cdot D_i(2,\ j)\Bigr]b_2+\cdots\\
&+\Bigl[(-1)^{n+j}\sum_{i=1}^{n}D_i\cdot D_i(n,\ j)\Bigr]b_{n+1}\Biggr\}\qquad (j=1,\cdots,\ n)
\end{aligned}
$$

となる．他方，(10) を用いて

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}D_k^2x_j^{(k)}=&D_1[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}D_1(i,\ j)b_{i+1}]\\
&+D_2[(-1)^{1+j}D_2(1,\ j)b_1+\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+j}D_2(i,\ j)b_{i+1}]+\cdots\\
&+D_{n+1}[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}D_{n+1}(i,\ j)b_i]
\end{aligned}
$$

と表せ，この式を b_i でまとめると，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} D_k^2 x_j^{(k)} = &\left[(-1)^{1+j}\sum_{i=2}^{n+1} D_i\cdot D_i(1,\ j)\right] b_1 \\ &+\left[(-1)^{1+j} D_1\cdot D_1(1,\ j)+(-1)^{2+j}\sum_{i=3}^{n+1} D_i\cdot D_i(2,\ j)\right] b_2+\cdots \\ &+\left[(-1)^{n+j}\sum_{i=1}^{n} D_i\cdot D_i(n,\ j)\right] b_{n+1} \qquad (j=1, \cdots,\ n)\end{aligned} \tag{44}$$

となる．(43) の分子は (44) に等しいので，

$$\hat{x}_j=\frac{1}{(n\theta^2+1)D_{n+1}^2}\sum_{i=1}^{n+1} D_i^2 x_j^{(i)} \qquad (j=1, \cdots,\ n) \tag{45}$$

となり，この式の分子は補助定理 3 の (15) を用いると，

$$\sum_{i=1}^{n+1} D_i^2 x_j^{(i)}=\left[\theta^2\sum_{i=1}^{n} x_j^{(i)}+x_j^{(n+1)}\right] D_{n+1}^2 \qquad (j=1, \cdots,\ n) \tag{46}$$

と表せる．(45) と (46) より (42) をえる．　□

定理 4 の (42) で示される最小自乗法による近似解は，(1) の 1 番目から n 番目までの方程式を 1 つずつ順に除いてできる n 次元単体の n 個の頂点の各々を θ^2 で，$n+1$ 番目の方程式を除いてできる頂点を 1 で加重平均した値に等しい．

6．Chebyshev 基準による近似解

(1) の Chebyshev 基準（ミニマックス法）による近似解は，(2) の $n+1$ 個の誤差の絶対値の中の最大なもの

$$\max_{i=1,\cdots,\ n+1} |e_i|$$

を最小にすることによって求められる．ここで，z を

$$z=\max_{i=1,\cdots,\ n+1} |e_i|$$

と定めると，すべての i に対して $z \geqq |e_i|$ であるから，

$$z \geqq e_i, \quad z \geqq -e_i \qquad (i=1, \cdots,\ n+1), \qquad z \geqq 0$$

となる．これらに (2) を代入して整理すると，Chebyshev 基準による近似解は，

$$z \tag{47}$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n+z &\geqq b_i \qquad (i=1, \cdots,\ n+1)\\ -a_{i1}x_1-a_{i2}x_2-\cdots-a_{in}x_n+z &\geqq -b_i \qquad (i=1, \cdots,\ n+1)\\ z &\geqq 0\end{aligned} \tag{48}$$

というリニアー･プログラミングの問題の最適解としてえられる．この主問題に対する双対問題は，

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i(u_i-v_i) \tag{49}$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{i1}(u_i-v_i)=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(50)
$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{in}(u_i - v_i) = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n+1} (u_i + v_i) \leqq 1$$
$$u_i \geqq 0,\ v_i \geqq 0 \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$

と表せる．

主問題 (47)−(48) の最適解を $\tilde{x}_j$，$\tilde{z}$，双対問題 (49)−(50)の最適解を $\tilde{u}_i$，$\tilde{v}_i$ とする．このとき，$\tilde{z} = 0$ ならば，(48) のすべての式が等号で成立し，(1) が過剰決定であるという仮定に反する．したがって，

$$\tilde{z} > 0$$

でなければならない．これより相補弛緩定理(Bertsimas and Tsitsiklis［2］, pp. 151-2, Chvátal［5］, pp. 62-4, Collatz and Wetterling［6］, pp. 92-3, Cooper and Steinberg［7］, pp. 174-5, Gass［12］, pp. 168-70, Hadley［14］, pp. 239-41, Krekó［17］, p. 196, Murty［19］, pp. 197-8) を用いると，双対問題の制約条件 (50) の $n+1$ 番目の不等式は最適解に対して等号で成立し，

(50′)
$$\sum_{i=1}^{n+1} (\tilde{u}_i + \tilde{v}_i) = 1$$

となる．また，双対問題の最適解においてある番号 k に対して $\tilde{u}_k > 0$，$\tilde{v}_k > 0$ であるならば，相補弛緩定理によって主問題の制約条件 (48) の k 番目の組の２つの不等式はともに等号で成立し，これより $\tilde{z} = 0$ となるが，これは先の結果に矛盾する．したがって，すべての i について同時に $\tilde{u}_i > 0$，$\tilde{v}_i > 0$ となることはなく，

(51)
$$\tilde{u}_i \tilde{v}_i = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$

でなければならない．

いま，σ_i を ± 1 のいずれかとし，

(52)
$$\tilde{w}_i = \begin{cases} \tilde{u}_i & (\sigma_i = 1 \text{のとき}) \\ \tilde{v}_i & (\sigma_i = -1 \text{のとき}) \end{cases} \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$

と定める．(50′)，(51)，(52) より制約条件 (50) は，

(53)
$$\begin{aligned} a_{11}\sigma_1\tilde{w}_1 + a_{21}\sigma_2\tilde{w}_2 + \cdots + a_{n+1,1}\sigma_{n+1}\tilde{w}_{n+1} &= 0 \\ a_{12}\sigma_1\tilde{w}_1 + a_{22}\sigma_2\tilde{w}_2 + \cdots + a_{n+1,2}\sigma_{n+1}\tilde{w}_{n+1} &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad & \vdots \\ a_{1n}\sigma_1\tilde{w}_1 + a_{2n}\sigma_2\tilde{w}_2 + \cdots + a_{n+1,n}\sigma_{n+1}\tilde{w}_{n+1} &= 0 \\ \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + \cdots + \tilde{w}_{n+1} &= 1 \end{aligned}$$

と表せる．(53) の係数からなる行列式を

(54)
$$D = \begin{vmatrix} \sigma_1 a_{11} & \sigma_2 a_{21} & \cdots & \sigma_{n+1} a_{n+1,1} \\ \sigma_1 a_{12} & \sigma_2 a_{22} & \cdots & \sigma_{n+1} a_{n+1,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_1 a_{1n} & \sigma_2 a_{2n} & \cdots & \sigma_{n+1} a_{n+1,n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

とし，

(55) $$\pi_i = \sigma_1\cdots\sigma_{i-1}\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{n+1} \qquad (i=1,\cdots,n+1)$$

と定める．(8) と (55) を用いて (54) を最後の行で展開すると，

$$D=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{n+1+i}\pi_i D_i$$

となり，この式に補助定理３の (15) を用いると，

(56) $$D=(\pi_{n+1}-\theta\sum_{i=1}^{n}\pi_i)D_{n+1}$$

と表せる．次に，σ_1 から σ_{n+1} までの値を

(57) $$\operatorname{sgn}(-\sigma_1)=\cdots=\operatorname{sgn}(-\sigma_n)=\operatorname{sgn}\sigma_{n+1}\neq 0$$

が成立するように定める．ここで，任意の $x(\neq 0)$ に対して $x>0$ なら $\operatorname{sgn}x=1$，$x<0$ なら $\operatorname{sgn}x=-1$ とする．(57) に関する限り各項を１に等しくなるように定めることも，－１に等しくなるように定めることもできるけれども，後に示すようにこれらのいずれかでなければならない．(57) の各式に $n+1$ 個の積 $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n+1}$ を掛け，すべての i について $\sigma_i^2=1$ であることと (55) を考慮すると，

(58) $$\operatorname{sgn}(-\pi_1)=\cdots=\operatorname{sgn}(-\pi_n)=\operatorname{sgn}\pi_{n+1}$$

が成立する．(56) において (58) と $\theta>0$ より

$$D\neq 0$$

である．

(53) を Cramer のルールを用いて解くと，

(59) $$\tilde{w}_i=\frac{(-1)^{n+1+i}\pi_i D_i}{D} \qquad (i=1,\cdots,n+1)$$

となり，(59) を (15)，(55)，(56) を用いて整理すると，

(60) $$\tilde{w}_i=-\frac{\sigma_i\theta}{\sigma_{n+1}-\theta\sum_{i=1}^{n}\sigma_i} \qquad (i=1,\cdots,n), \qquad \tilde{w}_{n+1}=\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_{n+1}-\theta\sum_{i=1}^{n}\sigma_i}$$

となる．(60) の $\tilde{w}_i$ は (57) よりすべて正である．このことより

(61) $$0<\tilde{w}_i<1 \qquad (i=1,\cdots,n+1), \qquad \sum_{i=1}^{n+1}\tilde{w}_i=1$$

が成立する．(52) と (60) より目的関数 (49) の値は，

(62) $$\sum_{i=1}^{n+1}b_i(\tilde{u}_i-\tilde{v}_i)=\sum_{i=1}^{n+1}b_i\sigma_i\tilde{w}_i=\frac{b_{n+1}-\theta\sum_{i=1}^{n}b_i}{\sigma_{n+1}-\theta\sum_{i=1}^{n}\sigma_i}$$

と表せる．

(52) より $\sigma_i=1$ であるとき $\tilde{w}_i=\tilde{u}_i>0$ であるから，相補弛緩定理により主問題の制約条件 (48) の i 番目の組のはじめの式が等号で成立し，$\sigma_i=-1$ であるとき $\tilde{w}_i=\tilde{v}_i>0$ であるから，i 番目の組の後の式が等号で成立する．これらより制約条件 (48) は，

(63) $$\begin{array}{ccccccc} \sigma_1 a_{11}\tilde{x}_1 & +\ \sigma_1 a_{12}\tilde{x}_2\ + & \cdots & +\ \sigma_1 a_{1n}\tilde{x}_n & +\ \tilde{z} & = & \sigma_1 b_1 \\ \sigma_2 a_{21}\tilde{x}_1 & +\ \sigma_2 a_{22}\tilde{x}_2\ + & \cdots & +\ \sigma_2 a_{2n}\tilde{x}_n & +\ \tilde{z} & = & \sigma_2 b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{array}$$

$$\sigma_{n+1}a_{n+1,1}\tilde{x}_1+\sigma_{n+1}a_{n+1,2}\tilde{x}_2+\cdots+\sigma_{n+1}a_{n+1,n}\tilde{x}_n+\tilde{z}=\sigma_{n+1}b_{n+1}$$

と表せる．(54) を用いて (63) を Cramer のルールで解くと，

$$\tilde{x}_j=\frac{\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+j}\sigma_i b_i}{D}\begin{vmatrix}\sigma_1a_{11} & \cdots & \sigma_1a_{1,j-1} & \sigma_1a_{1,j+1} & \cdots & \sigma_1a_{1n} & 1\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \sigma_{i-1}a_{i-1,1} & \cdots & \sigma_{i-1}a_{i-1,j-1} & \sigma_{i-1}a_{i-1,j+1} & \cdots & \sigma_{i-1}a_{i-1,n} & 1\\ \sigma_{i+1}a_{i+1,1} & \cdots & \sigma_{i+1}a_{i+1,j-1} & \sigma_{i+1}a_{i+1,j+1} & \cdots & \sigma_{i+1}a_{i+1,n} & 1\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \sigma_{n+1}a_{n+1,1} & \cdots & \sigma_{n+1}a_{n+1,j-1} & \sigma_{n+1}a_{n+1,j+1} & \cdots & \sigma_{n+1}a_{n+1,n} & 1\end{vmatrix}$$

となり，(8) と (55) を用いてこの行列式を最後の列で展開し，補助定理1の (9) を用いると，

$$\begin{aligned}\tilde{x}_j=&\frac{(-1)^{1+j}b_1}{D}\Big[\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{n+i-1}\pi_iD_i(1,\ j)\Big]\\ &+\frac{(-1)^{2+j}b_2}{D}\Big[(-1)^{n+1}\pi_1D_1(1,\ j)+\sum_{i=3}^{n+1}(-1)^{n-1+i}\pi_iD_i(2,\ j)\Big]\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+\frac{(-1)^{n+1+j}b_{n+1}}{D}\Big[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}\pi_iD_i(n,\ j)\Big]\qquad(j=1,\cdots,\ n)\end{aligned}\tag{64}$$

となり，同じく (63) より

$$\tilde{z}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}\sigma_1a_{11} & \sigma_1a_{12} & \cdots & \sigma_1a_{1n} & \sigma_1b_1\\ \sigma_2a_{21} & \sigma_2a_{22} & \cdots & \sigma_2a_{2n} & \sigma_2b_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \sigma_{n+1}a_{n+1,1} & \sigma_{n+1}a_{n+1,2} & \cdots & \sigma_{n+1}a_{n+1,n} & \sigma_{n+1}b_{n+1}\end{vmatrix}$$

となり，この行列式を最後の列で展開し，(15) と (56) を用いて書き換えると，

$$\begin{aligned}\tilde{z}=&\frac{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n+1}}{D}\Big[(-1)^{n+2}b_1(-1)^{n-1}\theta D_{n+1}+(-1)^{n+3}b_2(-1)^{n-2}\theta D_{n+1}+\cdots\\ &+(-1)^{2n+1}b_n(-1)^{0}\theta D_{n+1}+b_{n+1}D_{n+1}\Big]\\ =&\frac{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n+1}}{\pi_{n+1}-\theta\sum_{i=1}^{n}\pi_i}\Big(b_{n+1}-\theta\sum_{i=1}^{n}b_i\Big)\end{aligned}$$

となるから，これより

$$\tilde{z}=\frac{b_{n+1}-\theta\sum_{i=1}^{n}b_i}{\sigma_{n+1}-\theta\sum_{i=1}^{n}\sigma_i}>0\tag{65}$$

と表せる．(65) の $\tilde{z}$ は正でなければならない．

定理５．過剰決定の連立方程式 (1) の Chebyshev 基準による近似解を求める主問題 (47)−(48) の最適解は (64) の $\tilde{x}_j$ と (65) の $\tilde{z}$ であり，双対問題 (49)−(50) の最適解は (60) の $\tilde{w}_i$ である．

証明．(64) と (65) の $\tilde{x}_j$ と $\tilde{z}$ が主問題の実行可能解で，(60) の $\tilde{w}_i$ が双対問題の実行可能解であることは既に示した．これらの実行可能解に対する主問題の目的関数 (47) の値は (65) で示され，双対問題の目的関数 (49) の値は (62) で示される．これら２つの目的関数の値が等しいので，双対定

理によりこれらの実行可能解は最適解である．　□

(10) の $x_j^{(i)}$ と (59) の $\tilde{w}_i$ よりすべての j に対して

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{w}_i\, x_j^{(i)} = & \frac{(-1)^n\pi_1}{D}\sum_{h=1}^{n}(-1)^{h+j}b_{h+1}D_1(h,\ j) \\ & + \frac{(-1)^{n+1}\pi_2}{D}\left[(-1)^{1+j}b_1D_2(1,\ j)+\sum_{h=2}^{n}(-1)^{h+j}b_{h+1}D_2(h,\ j)\right] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{(-1)\pi_n}{D}\left[\sum_{h=1}^{n-1}(-1)^{h+j}b_hD_n(h,\ j)+(-1)^{n+j}b_{n+1}D_n(n,\ j)\right] \\ & + \frac{\pi_{n+1}}{D}\sum_{h=1}^{n}(-1)^{h+j}b_hD_{n+1}(h,\ j)\end{aligned}$$

と表せる．この式を b_i で整理すると，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{w}_i\, x_j^{(i)} = & \frac{(-1)^{1+j}b_1}{D}\left[(-1)^{n+1}\pi_2D_2(1,\ j)+\cdots+(-1)\pi_nD_n(1,\ j)+\pi_{n+1}D_{n+1}(1,\ j)\right] \\ & + \frac{(-1)^{2+j}b_2}{D}\left[(-1)^{n+1}\pi_1D_1(1,\ j)+\cdots+(-1)\pi_nD_n(2,\ j)+\pi_{n+1}D_{n+1}(2,\ j)\right] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{(-1)^{n+1+j}b_{n+1}}{D}\left[(-1)^{n+1}\pi_1D_1(n,\ j)+(-1)^n\pi_2D_2(n,\ j)+\cdots+\pi_nD_n(n,\ j)\right]\end{aligned}$$

となる．これと (64) の $\tilde{x}_j$ を比較するとわかるように，

(66) $$\tilde{x}_j=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{w}_i\, x_j^{(i)} \qquad (j=1,\cdots,\ n)$$

が成立する．

(57) を定義するとき，これらの各式は ± 1 のいずれかでなければならないと述べたが，ここでこれらの値をどのように定めるか述べる．主問題の目的関数の最小値は (65) の $\tilde{z}$ で，これは正である．これと双対問題の目的関数の (62) で示される最大値は等しくなければならないから，(62) は正でなければならない．したがって，(20) が成立して (62) の分子が負であるときには，この分母も負でなければならず，このため (57) の各式が負になるようにすべての σ_i を決定しなければならない．このこととすべての i について $\sigma_i=\pm 1$ のいずれかであることより，この場合

(67-1) $$\sigma_1=\cdots=\sigma_n=1,\ \sigma_{n+1}=-1$$

でなければならない．また，(21) が成立して (62) の分子が正であるときには，この分母も正でなければならず，(57) の各式が正になるようにすべての σ_i を決定しなければならないから，

(67-2) $$\sigma_1=\cdots=\sigma_n=-1,\ \sigma_{n+1}=1$$

でなければならない．(67) のいずれかの場合にも (60) の $\tilde{w}_i$ は

(60′) $$\tilde{w}_i=\frac{\theta}{n\theta+1} \qquad (i=1,\cdots,\ n), \qquad \tilde{w}_{n+1}=\frac{1}{n\theta+1}$$

となる．このとき，次の定理をえる．

定理６．(10) の $x_j^{(i)}$ に対して

(68)
$$\tilde{x}_j = \frac{1}{n\theta + 1}\left[\theta \sum_{i=1}^{n} x_j^{(i)} + x_j^{(n+1)}\right] \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

が成立する．

証明． (66) と (60′) より結論をえる．　□

定理 6 は，Chebyshev 基準による近似解が (10) で示される n 次元単体の $n+1$ 個の頂点の各々を対応する (60′) で示される最適な双対変数の値で加重平均したものに等しいことを示している．

7．L_1，L_2，L_∞近似解と n 次元単体の重心の位置関係

本節で過剰決定の連立方程式 (1) の最小絶対値法（L_1 近似），最小自乗法（L_2 近似），Chebyshev 基準 (L_∞ 近似) による近似解と (1) によってできる n 次元単体の重心の位置の関係を明らかにする．

Haar 条件が成立するとき，(1) によってできる n 次元単体の重心を G とし，G の第 j 座標を x_j^G とすると，

(69)
$$x_j^G = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_j^{(i)} \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

と表される．

最初に，(17) の場合について考察する．この場合，L_1 近似解は定理 1 の (33) で与えられる（以下において簡単化のために変数の番号 j の 1 から n を記載せず，単に j とだけ表す）．この L_1 近似解と (69) で表される重心 G を結ぶ直線上の任意の点の第 j 座標 x_j は，(33) の $x_j^{(n+1)}$ と (69) の x_j^G より任意の実数 t に対して

$$x_j = \frac{t\sum_{i=1}^{n+1} x_j^{(i)}}{n+1} + (1-t)\, x_j^{(n+1)}$$

と表せ，これより

(70)
$$x_j = \frac{t}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_j^{(i)} + \left(1 - \frac{nt}{n+1}\right) x_j^{(n+1)}$$

となる．定理 4 の (42) で表される L_2 近似解が直線 (70) の上にあるか調べるために $x_j = \hat{x}_j$，すなわち

(71)
$$\frac{\theta^2 \sum_{i=1}^{n+1} x_j^{(i)} + x_j^{(n+1)}}{n\theta^2 + 1} = \frac{t}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_j^{(i)} + \left(1 - \frac{nt}{n+1}\right) x_j^{(n+1)}$$

とする．(71) がすべての $x_j^{(i)}$ に対して同じ t の値で成立するならば，L_2 近似解はこの直線上にある．(71) の $x_j^{(i)}$ ($i = 1, \cdots, n$) の両辺の係数が等しくなるためには

$$\frac{\theta^2}{n\theta^2 + 1} = \frac{t}{n+1}$$

でなければならず，これより

(72)
$$t = \frac{(n+1)\,\theta^2}{n\theta^2 + 1}$$

でなければならない．また，(71) の $x_j^{(n+1)}$ の両辺の係数が等しくなるためには

$$\frac{1}{n\theta^2+1}=1-\frac{nt}{n+1}$$

でなければならない．これよりやはり (72) が成立するので，(42) で表される L_2 近似解は直線 (70) の上にある．次に，定理 6 の (68) で表される L_∞ 近似解が直線 (70) の上にあるか $x_j=\tilde{x}_j$ として，すなわち

(73) $$\frac{\theta\sum_{i=1}^{n}x_j^{(i)}+x_j^{(n+1)}}{n\theta+1}=\frac{t}{n+1}\sum_{i=1}^{n}x_j^{(i)}+\left(1-\frac{nt}{n+1}\right)x_j^{(n+1)}$$

として (73) がすべての $x_j^{(i)}$ について同じ t の値で成立するか調べる．(73) の $x_j^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$ の両辺の係数が等しくなるためには

$$\frac{\theta}{n\theta+1}=\frac{t}{n+1}$$

でなければならない．これより

(74) $$t=\frac{(n+1)\theta}{n\theta+1}$$

をえる．(73) の $x_j^{(n+1)}$ の両辺の係数は

$$\frac{1}{n\theta+1}=1-\frac{nt}{n+1}$$

が成立するとき，等しくなる．これよりやはり (74) がえられる．したがって，(68) の L_∞ 近似解も直線 (70) の上にある．さらに，(17) が成立するとき，(72) と (74) の t の値の間に

(75) $$0<\frac{(n+1)\theta^2}{n\theta^2+1}<\frac{(n+1)\theta}{n\theta+1}<1$$

という関係がある．(70) から (75) より次の定理をえる．

定理７．(14) において (17) が成立するとき，(1) の L_1 近似解，L_2 近似解，L_∞ 近似解，n 次元単体の重心 G は，L_1 近似解から重心に向かってこの順に一直線上に並ぶ.

次に，(18) が成立する場合，L_1 近似解は定理 2 の (34) で与えられる (1) によって定まる $n+1$ 個の頂点であり，これらの凸 1 次結合も L_1 近似解である．したがって，(69) で示される重心 G も L_1 近似解である．この場合，定理 4 の (42) で与えられる L_2 近似解も重心 G に一致し，定理 6 の (68) で示される L_∞ 近似解も重心と一致する．ゆえに，次の定理が成立する．

定理８．(14) において (18) が成立するとき，L_2 近似解，L_∞ 近似解，n 次元単体の重心 G と特別に選んだ L_1 近似解は一致する.

最後に，(14) において (19) が成立する場合について考察する．この場合，L_1 近似解は定理 3 の (36) で与えられる多重解で，(1) によって決定される n 次元単体の n 個の頂点 $x_j^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$ に等しい．これら n 個の点の凸 1 次結合である

(76) $$x_j^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_j^{(i)}$$

も L_1 近似解である．(69) の重心 G と (76) で与えられる L_1 近似解を結ぶ直線上の任意の点の第 j 座標 x_j は任意の実数 t によって

$$x_j = \frac{t}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_j^{(i)} + \frac{(1-t)}{n}\sum_{i=1}^{n} x_j^{(i)}$$

と表せ，これを整理すると

$$x_j = \frac{(n+1-t)}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} x_j^{(i)} + \frac{t}{n+1}\,x_j^{(n+1)} \tag{77}$$

となる．定理４の (42) で示される L_2 近似解が直線 (77) の上にあることを知るために $x_j = \hat{x}_j$，すなわち

$$\frac{\theta^2\sum_{i=1}^{n} x_j^{(i)} + x_j^{(n+1)}}{n\theta^2+1} = \frac{(n+1-t)}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} x_j^{(i)} + \frac{t}{n+1}\,x_j^{(n+1)} \tag{78}$$

として (78) がすべての $x_j^{(i)}$ に対して同じ t の値で成立するか調べる．(78) の $x_j^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$ の両辺の係数は，

$$\frac{\theta^2}{n\theta^2+1} = \frac{n+1-t}{n(n+1)}$$

すなわち

$$t = \frac{n+1}{n\theta^2+1} \tag{79}$$

が成立するとき等しい．また，$x_j^{(n+1)}$ の両辺の係数は

$$\frac{1}{n\theta^2+1} = \frac{t}{n+1}$$

が成立するとき，すなわち (79) が成立するとき等しくなる．したがって，(42) の L_2 近似解は直線 (77) の上にある．次に，(68) の L_∞ 近似解が直線 (77) の上にあるか調べる．このため (77) において $x_j = \tilde{x}_j$ とすると，

$$\frac{\theta\sum_{i=1}^{n} x_j^{(i)} + x_j^{(n+1)}}{n\theta+1} = \frac{(n+1-t)}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} x_j^{(i)} + \frac{t}{n+1}\,x_j^{(n+1)} \tag{80}$$

となり，(80) の $x_j^{(i)}$　$(i=1,\cdots,n)$ の両辺の係数が等しくなるためには

$$\frac{\theta}{n\theta+1} = \frac{n+1-t}{n(n+1)}$$

より

$$t = \frac{n+1}{n\theta+1} \tag{81}$$

が成立しなければならない．また，$x_j^{(n+1)}$ の両辺の係数もやはり (81) が成立するとき等しくなるので，L_∞ 近似解も直線 (77) の上にある．さらに，(19) が成立するとき，(79) と (81) の t の値の間に

$$0 < \frac{n+1}{n\theta^2+1} < \frac{n+1}{n\theta+1} < 1 \tag{82}$$

という関係がある．(76) から (82) より次の定理をえる．

定理９．(14) において (19) が成立するとき，(76) で示される L_1 近似解，L_2 近似解，L_∞ 近似解，

(1) によって定まる n 次元単体の重心 G は，この L_1 近似解から重心に向かってこの順に一直線上に並ぶ．

８．数値例

本論文で考察した定理に関する数値例を２題取り上げる．

例題１．Haar 条件を満たす過剰決定の連立方程式を

(83)
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &= 18 \\ -x_1 + 4x_2 &= 18 \\ 2x_1 + x_2 &= 9 \end{aligned}$$

とする．(83) の係数の間に

$$a_{31} = 2 = \frac{5-1}{2} = \theta(a_{11} + a_{21})$$

$$a_{32} = 1 = \frac{-2+4}{2} = \theta(a_{12} + a_{22})$$

という関係があるから，(14) が成立し，$\theta = 1/2$ であるから，(17) が成立している．

(83) の各方程式は第１図のように描かれ，(83) から i 番目の方程式を除いた２つの方程式の交点は，

$$(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)}) = (2,\ 5), \qquad (x_1^{(2)},\ x_2^{(2)}) = (4,\ 1), \qquad (x_1^{(3)},\ x_2^{(3)}) = (6,\ 6)$$

であり，これらによってできる２次元単体の重心 G の座標は，

$$(x_1^G,\ x_2^G) = (4,\ 4)$$

であり，これは第１図の点 G で示される．各方程式の誤差を

$$\begin{aligned} e_1 &= e_1^+ - e_1^- = 18 - 5x_1 + 2x_2 \\ e_2 &= e_2^+ - e_2^- = 18 + x_1 - 4x_2 \\ e_3 &= e_3^+ - e_3^- = 9 - 2x_1 - x_2 \end{aligned}$$

と定める．これより (83) の最小絶対値法による近似解は，

$$\sum_{i=1}^{3} (e_i^+ + e_i^-)$$

を次の制約条件の下で最小にする

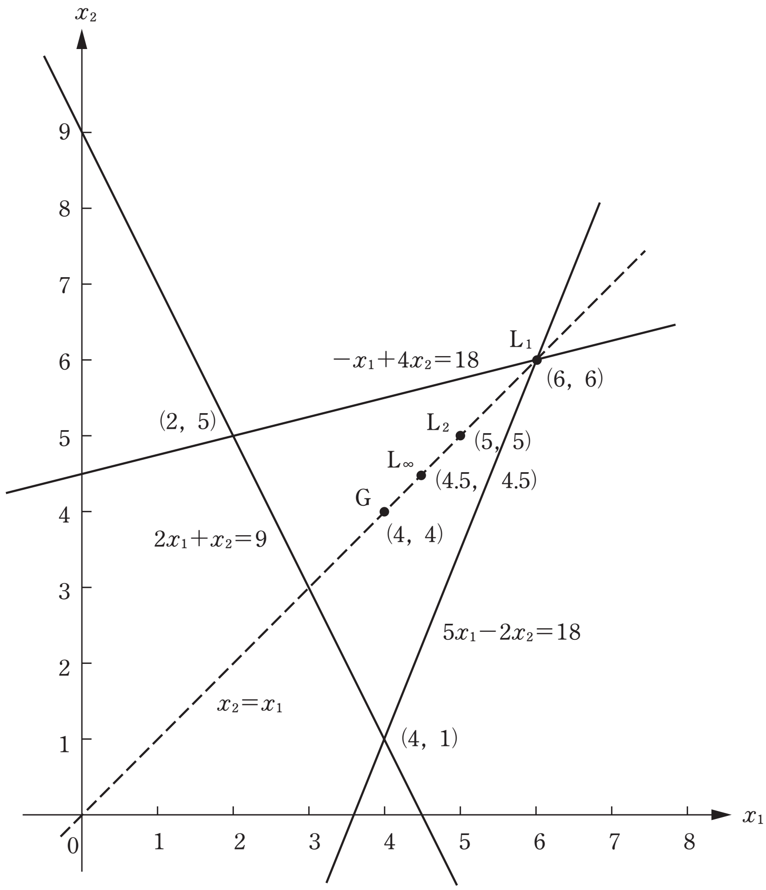
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + e_1^+ - e_1^- &= 18 \\ -x_1 + 4x_2 + e_2^+ - e_2^- &= 18 \\ 2x_1 + x_2 + e_3^+ - e_3^- &= 9 \\ e_i^+ \geqq 0,\ e_i^- \geqq 0 \quad &(i=1,\ 2,\ 3) \end{aligned}$$

というリニアー・プログラミングの問題の最適解としてえられる．この問題の最適解は，

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 6, \quad e_1 = e_2 = 0, \quad e_3 = -9$$

であり，これは第１図の点 L_1 で示される．

最小自乗法による近似解は，



第 1 図

$$\sum_{i=1}^{3} e_i^2 = 30x_1^2 - 24x_1x_2 + 21x_2^2 - 180x_1 - 90x_2 + 729$$

を最小にするものであるから，これより正規方程式は，

$$5x_1 - 2x_2 = 15$$
$$-4x_1 + 7x_2 = 15$$

となる．これを解くと，

$$\hat{x}_1 = 5, \qquad \hat{x}_2 = 5$$

であり，これは第 1 図の点 L_2 で示される．このとき，$n = 2$，$\theta = 1/2$ であるから，先の 2 次元単体の頂点の座標を用いると，

$$\hat{x}_1 = \frac{\theta^2 (x_1^{(1)} + x_1^{(2)}) + x_1^{(3)}}{n\theta^2 + 1} = \frac{(1/2)^2 (2 + 4) + 6}{2(1/2)^2 + 1} = 5$$

$$\hat{x}_2 = \frac{\theta^2 (x_2^{(1)} + x_2^{(2)}) + x_2^{(3)}}{n\theta^2 + 1} = \frac{(1/2)^2 (5 + 1) + 6}{2(1/2)^2 + 1} = 5$$

と表せ，定理 4 の (42) が成立していることがわかる．

Chebyshev 基準による近似解は，

$$z = \max(|e_1|,\ |e_2|,\ |e_3|)$$

とすると，$z \geqq |e_i| \geqq 0$ より $z \geqq e_i$，$z \geqq -e_i$ であるから，

$$z$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$\begin{aligned}
5x_1 - 2x_2 + z &\geqq 18, & -5x_1 + 2x_2 + z &\geqq -18\\
-x_1 + 4x_2 + z &\geqq 18, & x_1 - 4x_2 + z &\geqq -18\\
2x_1 + x_2 + z &\geqq 9, & -2x_1 - x_2 + z &\geqq -9\\
& & z &\geqq 0
\end{aligned}$$

というリニアー・プログラミングの問題の最適解としてえられる．この問題の最適解は，

$$\tilde{x}_1 = 4.5, \qquad \tilde{x}_2 = 4.5, \qquad \tilde{z} = 4.5$$

であり，これは第１図の点 L_∞ で表される．このとき，

$$\tilde{x}_1 = \frac{\theta(x_1^{(1)} + x_1^{(2)}) + x_1^{(3)}}{n\theta + 1} = \frac{(1/2)(2+4)+6}{2(1/2)+1} = 4.5$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{\theta(x_2^{(1)} + x_2^{(2)}) + x_2^{(3)}}{n\theta + 1} = \frac{(1/2)(5+1)+6}{2(1/2)+1} = 4.5$$

であるから，定理６の (68) が成立している．したがって，第１図の点 L_1，L_2，L_∞ と単体の重心 G は直線 $x_2 = x_1$ 上にこの順に並んでおり，定理７が成立していることがわかる．

例題２．Haar 条件を満たす過剰決定の連立方程式を

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 &= 2\\
x_1 + 2x_2 &= 11\\
2x_1 + x_2 &= 7
\end{aligned} \tag{84}$$

とする．(84) の係数の間に

$$\begin{aligned}
a_{31} &= 2 = 1(1+1) = \theta(a_{11} + a_{21})\\
a_{32} &= 1 = 1(-1+2) = \theta(a_{12} + a_{22})
\end{aligned}$$

という関係があるから，(14) が $\theta = 1$ で成立し，(18) が成立している．

(84) の各方程式は第２図のように描かれ，(84) から i 番目の式を除いた残り２つの式の交点は，

$$(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)}) = (1,\ 5), \qquad (x_1^{(2)},\ x_2^{(2)}) = (3,\ 1), \qquad (x_1^{(3)},\ x_2^{(3)}) = (5,\ 3)$$

であり，これらによってできる２次元単体の重心 G は，

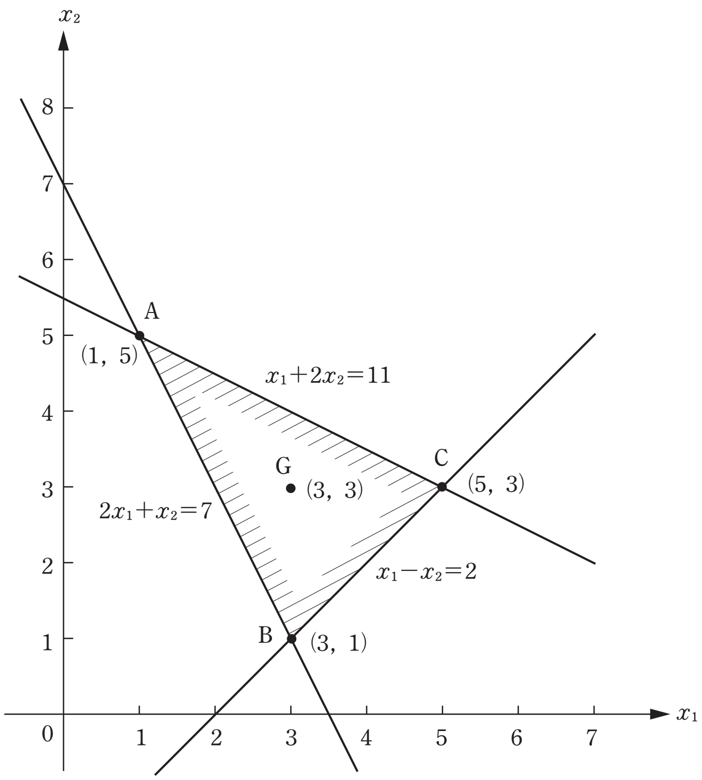
$$(x_1^G,\ x_2^G) = (3,\ 3)$$

で，これは第２図の点 G で示される．各方程式の誤差を

$$\begin{aligned}
e_1 &= e_1^+ - e_1^- = 2 - x_1 + x_2\\
e_2 &= e_2^+ - e_2^- = 11 - x_1 - 2x_2\\
e_3 &= e_3^+ - e_3^- = 7 - 2x_1 - x_2
\end{aligned}$$

と定める．(84) の最小絶対値法による近似解は，

$$\sum_{i=1}^{3} (e_i^+ + e_i^-)$$



第２図

を次の制約条件の下で最小にする

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad - x_2 + e_1^+ - e_1^- &= \ \ 2 \\
x_1 + 2x_2 + e_2^+ - e_2^- &= 11 \\
2x_1 \quad + x_2 + e_3^+ - e_3^- &= \ \ 7 \\
e_i^+ \geqq 0,\ e_i^- \geqq 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3)&
\end{aligned}
$$

という問題の最適解としてえられる．この問題の最適解は多重解で，

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 5, \quad e_1 = 6, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 0$$

は第２図の点 A で，また

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 1, \quad e_1 = 0, \quad e_2 = 6, \quad e_3 = 0$$

は点 B で，さらに

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 3, \quad e_1 = 0, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = -6$$

は点 C で示される．これらの点の凸 1 次結合である 3 角形 ABC の辺と内部のすべての点も最小絶対値法による近似解である．特に

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = 3$$

も最小絶対値法による近似解であり，これは点 G で示される．

(84) の最小自乗法による近似解は，

$$\sum_{i=1}^{3} e_i^2 = 6x_1^2 + 6x_1x_2 + 6x_2^2 - 54x_1 - 54x_2 + 174$$

であるから，正規方程式は

$$\begin{aligned} 2x_1 \ \ + x_2 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 &= 9 \end{aligned}$$

となり，これより

$$\hat{x}_1 = 3, \qquad \hat{x}_2 = 3$$

であり，これも点 G で示される．このとき，$n = 2$，$\theta = 1$ であるから，２次元単体 ABC の頂点の座標を用いると，最小自乗法による近似解は，

$$\hat{x}_1 = \frac{\theta^2 (x_1^{(1)} + x_1^{(2)}) + x_1^{(3)}}{n\theta^2 + 1} = \frac{1^2 (1 + 3) + 5}{2 \times 1^2 + 1} = 3$$

$$\hat{x}_2 = \frac{\theta^2 (x_2^{(1)} + x_2^{(2)}) + x_2^{(3)}}{n\theta^2 + 1} = \frac{1^2 (5 + 1) + 3}{2 \times 1^2 + 1} = 3$$

と表せ，定理４の (42) が成立している．

Chebyshev 近似解は，

$$z = \max (|e_1|, |e_2|, |e_3|)$$

と定めると，$z \geqq |e_1| \geqq 0$ より $z \geqq e_i$，$z \geqq -e_i$ であるから，

$$z$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$\begin{aligned} x_1 \ - x_2 + z &\geqq \ \ 2, & -x_1 \ + x_2 + z &\geqq \ -2 \\ x_1 + 2x_2 + z &\geqq 11, & -x_1 - 2x_2 + z &\geqq -11 \\ 2x_1 \ + x_2 + z &\geqq \ \ 7, & -2x_1 \ - x_2 + z &\geqq \ -7 \\ & & z &\geqq 0 \end{aligned}$$

という問題の最適解である．この問題の最適解は，

$$\tilde{x}_1 = 3, \qquad \tilde{x}_2 = 3, \qquad \tilde{z} = 3$$

であり，やはり点 G で示される．この Chebyshev 近似解は，

$$\tilde{x}_1 = \frac{\theta (x_1^{(1)} + x_1^{(2)}) + x_1^{(3)}}{n\theta + 1} = \frac{1 (1 + 3) + 5}{2 \times 1 + 1} = 3$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{\theta (x_2^{(1)} + x_2^{(2)}) + x_2^{(3)}}{n\theta + 1} = \frac{1 (5 + 1) + 3}{2 \times 1 + 1} = 3$$

と表せ，定理６の (68) が成立している．したがって，(14) において (18) が成立する場合，ある L_1，また L_2，L_∞ 近似，２次元単体の重心 G は第２図に示されるように一致し，定理８が成立している．

参考文献

［１］Aitken, A., *Determinants and Matrices*. Edinburgh : Oliver & Boyd, 1956.

［２］Bertsimas, D., and Tsitsiklis, J. N., *Introduction to Linear Optimization*. Belmont, Mass. : Athena Scientific, 1997.

［３］Browne, E. T., *Introduction to the Theory of Determinants and Matrices*. Chapel Hill, N. C. : The University of North Carolina Press, 1958.

［4］Cheney, E. W., *Introduction to Approximation Theory.* Second Ed., New York : Chelsea Publishing Co., 1982.

［5］Chvátal, V., *Linear Programming.* New York : W. H. Freeman and Co., 1983.

［6］Collatz, L., and Wetterling, W., *Optimization Problems*, trans. P. Wadsack. New York : Springer-Verlag, 1975.

［7］Cooper, L., and Steinberg, D., *Methods and Applications of Linear Programming.* Philadelphia, Penn. : W. B. Saunders Co., 1974.

［8］Dantzig, G. B., and Thapa, M. N., *Linear Programming.* 1 : *Introduction.* New York : Springer-Verlag, 1997.

［9］Ferrar, W. L., *Algebra : A Text-Book of Determinants, Matrices, and Algebraic Forms.* Second Ed., Oxford : Oxford University Press, 1957.

［10］Gale, D., *The Theory of Linear Economic Models.* New York : McGraw-Hill Book Co., 1960.

［11］Gantmacher, F. R., *The Theory of Matrices*, trans. K. A. Hirsch. Vol. I, New York : Chelsea Publishing Co., 1959.

［12］Gass, S. I., *Linear Programming : Methods and Applications.* Fifth Ed., New York : McGraw-Hill Book Co., 1985.

［13］Hadley, G., *Linear Algebra.* Reading, Mass. : Addison-Wesley Publishing Co., 1961.

［14］Hadley, G., *Linear Programming.* Reading, Mass. : Addison-Wesley Publishing Co., 1962.

［15］Hohn, F. E., *Elementary Matrix Algebra.* Third Ed., New York : Dover Publications, 1973.

［16］Horn, R. A., and Johnson, C. R., *Matrix Analysis.* Cambridge : Cambridge University Press, 1985.

［17］Krekó, B., *Linear Programming*, trans. J. H. L. Ahrens and C. M. Safe. London : Sir Isaac Pitman & Sons, 1968.

［18］Lancaster, P., and Tismenetsky, M., *The Theory of Matrices.* Second Ed., New York : Academic Press, 1985.

［19］Murty, K. G., *Linear Programming.* New York : John Wiley & Sons, 1983.

［20］Nef, W., *Linear Algebra*, trans. J. C. Ault. New York : Dover Publications, 1967.

［21］尾崎雄一郎,「過剰決定の連立方程式の３つの基準による近似解が一致するための条件」,『日本オペレーションズ・リサーチ学会 1984 年度秋季研究発表会アブストラクト集』, 1984 年, pp. 41-2.

［22］尾崎雄一郎,「Chebyshev 近似のある基本的な定理とその応用」,『名城論叢』, 第 10 巻, 第 1 号 (2009 年), pp. 33-50.

［23］尾崎雄一郎,「特殊な条件の下での Chebyshev 近似」,『名城論叢』, 第 10 巻, 第 2 号 (2009 年), pp. 15-25.

［24］尾崎雄一郎,「垂心, 内心と Chebyshev 近似」,『名城論叢』, 第 10 巻, 第 3 号 (2009 年), pp. 11-20.

［25］尾崎雄一郎,「最小自乗近似に関する若干の定理―最小自乗近似と Chebyshev 近似の関連」,『名城論叢』, 第 10 巻, 第 3 号 (2009 年), pp. 21-36.

［26］尾崎雄一郎,「Chebyshev 近似問題を解く幾何学的方法」,『名城論叢』, 第 11 巻, 第 2 号 (2010 年), pp. 19-31.

［27］Rabinowitz, P., "Applications of Linear Programming to Numerical Analysis," *SIAM Review*, Vol. 10 (1968), pp. 121-59.

［28］Rice, J. R., *The Approximation of Fuctions*, Vol. 1 — *Linear Theory.* Reading, Mass. : Addison-Wesley Publishing Co., 1964.

［29］Rivlin, T. J., *An Introduction to the Approximation of Functions.* New York : Dover Publications, 1981.

［30］Stiefel, E., "Note on Jordan Elimination, Linear Programming and Tchebycheff Approximation," *Numerische Mathematik*, Vol. 2 (1960), pp. 1-17.

［31］Stiefel, E., "Methods — Old and New — for Solving the Tchebycheff Approximation Problem," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 1 (1964), pp. 164-76.

［32］Thrall, R. M., and Tornheim, L., *Vector Spaces and Matrices.* New York : Dover Publications, 1957.

［33］Watson, G. A., *Approximation Theory and Numerical Methods.* New York : John Wiley & Sons, 1980.

［34］Zukhovitskiy, S. I., and Avdeyeva, L. I., *Linear and Convex Programming*, trans. Scripta Technica, Inc. Philadelphia, Penn. : W. B. Saunders Co., 1966.