片側 L_1 近似問題の特徴づけ定理

尾　崎　雄一郎

1．はじめに

過剰決定の線形連立方程式の近似問題における各々の方程式の誤差の符号は正であっても負であってもよいが，片側近似問題における各方程式の誤差の符号はすべて非負であるか，あるいはすべて非正でなければならない．すべての誤差が非負であるという条件の下での近似問題は上からの片側近似問題と呼ばれ，すべての誤差が非正であるという条件の下での近似問題は下からの片側近似問題と呼ばれる．片側近似問題を取り上げた研究は多くはないけれど，Watson［14］と Collatz and Wetterling［4］(p. 268)は上からの Chebyshev 基準(ミニマックス法)による片側近似問題をリニアー・プログラミングの問題に，また Watson［15］，［16］は最小絶対値法（L_1 近似）と Chebyshev 基準による片側近似問題をリニアー・プログラミングの問題に変換して考察する方法を示した．

本論文において上からと下からの片側 L_1 近似問題の実行可能解や最適解を特徴づける幾つかの定理を明らかにする．

2．片側 L_1 近似問題のリニアー・プログラミングによる表示

変数の数より方程式の数が1つ多い過剰決定の連立方程式を

$$
(1)\qquad
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 + & \cdots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 + & \cdots & + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n+1,1}x_1 & + a_{n+1,2}x_2 + & \cdots & + a_{n+1,n}x_n & = & b_{n+1}
\end{array}
$$

とし，(1)の i 番目の方程式に対する誤差 e_i を

$$
(2)\qquad e_i = b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) \qquad (i = 1, \cdots, n+1)
$$

とする．このとき，上からの片側近似問題は，

$$
(3)\qquad e_i \geqq 0 \qquad (i = 1, \cdots, n+1)
$$

という条件の下での近似問題であり，下からの片側近似問題は，

$$
(4)\qquad e_i \leqq 0 \qquad (i = 1, \cdots, n+1)
$$

という条件の下での近似問題である．(1)のある方程式を－1倍することを含めて何倍かすることは誤差の符号や値を変えることになり，元の方程式の近似解とは異なった近似解を与えることになるので，片側近似問題ではそのようにすることはできない．

誤差の L_1 ノルムを最小にする最小絶対値法による上からの片側近似問題は，(3) より

$$\sum_{i=1}^{n+1} |e_i| = \sum_{i=1}^{n+1} e_i$$

を最小にする近似解を求める問題である．したがって，上からの片側 L_1 近似問題は，これと (2), (3) より

(5)
$$\sum_{i=1}^{n+1} e_i$$

を次の制約条件の下で最小にする

(6)
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_2 &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad &\quad \vdots \\ a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \cdots + a_{n+1,n}x_n + e_{n+1} &= b_{n+1} \\ e_i \geqq 0 \qquad (i = 1, \cdots, n+1) & \end{aligned}$$

というリニアー・プログラミングの問題になる．この双対問題は，

(7)
$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i u_i^a$$

を次の制約条件の下で最大にする

(8)
$$\begin{aligned} a_{11}u_1^a + a_{21}u_2^a + \cdots + a_{n+1,1}u_{n+1}^a &= 0 \\ a_{12}u_1^a + a_{22}u_2^a + \cdots + a_{n+1,2}u_{n+1}^a &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & \\ a_{1n}u_1^a + a_{2n}u_2^a + \cdots + a_{n+1,n}u_{n+1}^a &= 0 \\ u_i^a \leqq 1 \qquad (i = 1, \cdots, n+1) & \end{aligned}$$

と表せる．

下からの L_1 近似問題は，(4) より

$$\sum_{i=1}^{n+1} |e_i| = -\sum_{i=1}^{n+1} e_i$$

を最小にする問題である．これと (2), (4) より下からの片側 L_1 近似問題は，

$$-\sum_{i=1}^{n+1} e_i$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + e_i = b_i \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$
$$e_i \leqq 0 \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$

と表せる．しかし，新しい変数 d_i を

$$d_i = -e_i \geqq 0 \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$

と定めて書き変えると，下からの片側 L_1 近似問題は，

(9)
$$\sum_{i=1}^{n+1} d_i$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$
(10)\qquad
\begin{array}{l}
-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n + d_1 = -b_1 \\
-a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \cdots - a_{2n}x_n + d_2 = -b_2 \\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
-a_{n+1,1}x_1 - a_{n+1,2}x_2 - \cdots - a_{n+1,n}x_n + d_{n+1} = -b_{n+1} \\
\qquad d_i \geqq 0 \qquad (i = 1, \cdots, n+1)
\end{array}
$$

と表せる．この双対問題は，

$$
(11)\qquad -\sum_{i=1}^{n+1} b_i u_i^b
$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$
(12)\qquad
\begin{array}{l}
a_{11}u_1^b + a_{21}u_2^b + \cdots + a_{n+1,1}u_{n+1}^b = 0 \\
a_{12}u_1^b + a_{22}u_2^b + \cdots + a_{n+1,2}u_{n+1}^b = 0 \\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{1n}u_1^b + a_{2n}u_2^b + \cdots + a_{n+1,n}u_{n+1}^b = 0 \\
\qquad u_i^b \leqq 1 \qquad (i = 1, \cdots, n+1)
\end{array}
$$

と表せる．

３．予備的な定理

片側 L_1 近似問題を特徴づける定理を証明するために用いるリニアー・プログラミングの双対定理と一意性に関する定理を本節で述べる．

定理Ⅰ． リニアー・プログラミングの主問題と双対問題の両方に実行可能解が存在するならば，両方の問題に最適解が存在する（Collatz and Wetterling［４］, p. 93, Cooper and Steinberg［５］, p. 171, Dantzig ［６］, p. 129, Dantzig and Thapa［７］, p. 135, Gale［８］, pp. 12, 78–82, Gass［９］, p. 162, Kolman and Beck［11］, pp. 174–6, Krekó［12］, pp. 194–5, Murty［13］, p. 193 など）．

定理Ⅱ． リニアー・プログラミングの主問題あるいは双対問題のいずれかに最適解が存在するならば，他方の問題にも最適解が存在し，各々の最適解に対する両方の問題の目的関数の値は等しい（Bertsimas and Tsitsiklis［１］, pp. 148–9, Calvert and Voxman［２］, pp. 284, 295, 309–11, Chvátal［３］, pp. 58–9, 141–3, Collatz and Wetterling［４］, pp. 90–2, Cooper and Steinberg［５］, pp. 163–4, Dantzig［６］, pp. 134–5, Gass［９］, pp. 158–61, Hadley［10］, pp. 229–30, Krekó［12］, pp. 193–4, Murty［13］, p. 192 など）．

定理Ⅲ． リニアー・プログラミングの最大化（最小化）の主問題の目的関数の値が上に（下に）有界でないための必要十分条件は，この最大化（最小化）問題に実行可能解が存在し，最小化（最大化）の双対問題に実行可能解が存在しないことである（Bertsimas and Tsitsiklis［１］, p. 147, Calvert and Voxman［２］, p. 283, Collatz and Wetterling［４］, p. 92, Cooper and Steinberg［５］, pp. 171–2,

Dantzig［6］, p. 129, Gass［9］, pp. 158, 161–2, Hadley［10］, pp. 241–2, Kolman and Beck［11］, p. 173, Murty［13］, p. 191 など).

定理Ⅳ．リニアー・プログラミングの主問題(双対問題)の最適な変数が正であるならば，双対問題(主問題)の対応する不等式は等号で成立する(Bertsimas and Tsitsiklis［1］, pp. 151–2, Calvert and Voxman［2］, pp. 289, 313–5, Chvátal［3］, pp. 62–4, Collatz and Wetterling［4］, pp. 92–3, 96–7, Cooper and Steinberg［5］, pp. 174–5, Dantzig［6］, pp. 134–6, Dantzig and Thapa［7］, p. 136, Gale［8］, pp. 19–20, 82, Gass［9］, pp. 168–70, Hadley［10］, pp. 239–41, Kolman and Beck［11］, pp. 178–9, Krekó［12］, p. 196, Murty［13］, pp. 197–8 など).

定理Ⅴ．双対問題(主問題)の最適解が退化していないならば，主問題(双対問題)の最適解は一意である(Bertsimas and Tsitsiklis［1］, pp. 129–30, Chvátal［3］, p. 65, Dantzig［6］, p. 95, Dantzig and Thapa［7］, p. 73, Krekó［12］, p. 195, Murty［13］, p. 140 など).

4．片側 L_1 近似問題の特徴づけ定理

本節において片側 L_1 近似問題の実行可能解や最適解を特徴づける幾つかの定理を証明する．以下において過剰決定の連立方程式(1)の係数行列からその第 i 行を除いてできる行列式を D_i と表し，すべての D_i はゼロでないという Haar 条件，すなわち

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (i = 1, \cdots, n+1) \tag{13}$$

を仮定する．

定理1．上からの片側 L_1 近似問題(5)−(6)と下からの片側 L_1 近似問題(9)−(10)のいずれか，あるいは両方に最適解が存在する．

証明．上からの片側近似問題(5)−(6)に実行可能解が存在しないと仮定する．この双対問題(7)−(8)には実行可能解(たとえば，すべての i について $u_i^a = 0$ である解)が存在するから，定理Ⅲより目的関数(7)の値を無限に大きく，すなわち

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i u_i^a \to +\infty \tag{14}$$

とすることができる．また，制約条件(8)の $u_i^a\,(i = 1, \cdots, n)$ を u_{n+1}^a で表すために Cramer のルールを用い，分子に現れる $(a_{n+1,1}, \cdots, a_{n+1,n})'$ の列を順次入れ替えて最後の列に置き(13)を用いると，行列式の性質より

$$u_i^a = \frac{(-1)^{n+1-i} D_i}{D_{n+1}} u_{n+1}^a \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{15}$$

と表せる．これよりすべての u_i^a は(乗数倍は別にして)一意に定まり，これらは(8)の不等式より上に有界であるから，(14)より

(16)
$$u_i^a \to -\infty \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$

とならなければならない．

次に，下からの片側近似問題(9)−(10)にも実行可能解が存在しないと仮定する．このとき，制約条件(8)と全く同じ形式である制約条件(12)に実行可能解が存在するから，すべての双対変数 u_i^b は，u_i^a の場合と同様に(15)より(乗数倍は別にして)一意に定まり，定理Ⅲよりこの場合目的関数(11)の値を

(17)
$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i u_i^b \to -\infty$$

とすることができる．(12)の不等式より u_i^b は上に有界であるから，(17)より

(18)
$$u_i^b \to -\infty \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$

とならなければならない．すべての u_i^a，またすべての u_i^b は一意に定まるから，(16)と(18)が成立するとき，明らかに(14)と(17)は矛盾している．したがって，上からの片側 L_1 近似問題(5)−(6)と下からの片側 L_1 近似問題(9)−(10)の両方に実行可能解が存在しないことはなく，これらの主問題のいずれか，あるいは両方に実行可能解が存在する．これらの双対問題には常に実行可能解が存在するので，定理Ⅰより上からの片側 L_1 近似問題(5)−(6)，あるいは下からの片側 L_1 近似問題(9)−(10)のいずれか，あるいは両方に最適解が存在する．□

定理２． 上からの片側 L_1 近似問題(5)−(6)と下からの片側 L_1 近似問題(9)−(10)の両方に実行可能解が存在するとき，これら各々の問題の実行可能解の集合の共通集合は空である．

証明． 上からの片側近似問題の制約条件(6)の任意の実行可能解を x_j^0，e_i^0 とすると，(1)が過剰決定であることより少なくとも１つの e_i^0 は正でなければならない．たとえば $e_k^0 > 0$ とすると，(6)より

$$e_k^0 = b_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j^0 > 0$$

である．これらの x_j^0，e_i^0 に対して下からの片側近似問題の制約条件(10)の k 番目の式は，

$$d_k = -b_k + \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j^0 < 0$$

となり，これは x_j^0，e_i^0 が制約条件(10)の実行可能解ではないことを意味する．同様に，制約条件(10)の任意の実行可能解は制約条件(6)の実行可能解ではない．以上より結論をえる．□

定理３． 上からの片側 L_1 近似問題(5)−(6)と下からの片側 L_1 近似問題(9)−(10)の両方に最適解が存在するとき，上からの片側近似問題の最適解において $\hat{e}_k > 0$ であるなら，下からの片側近似問題の最適解において $\hat{d}_k = 0$ であり，下からの片側近似問題の最適解において $\hat{d}_k > 0$ であるなら，上からの片側近似問題の最適解において $\hat{e}_k = 0$ である．

証明． 仮定により上からと下からの片側近似問題の各々に最適解が存在するので，定理Ⅱよりそれぞれの双対問題(7)−(8)と(11)−(12)の両方に最適解が存在する．双対問題(7)−(8)の最適解を

$\hat{u}_i^a$ $(i=1,\cdots,n+1)$，双対問題(11)−(12)の最適解を $\hat{u}_i^b$ $(i=1,\cdots,n+1)$ とすると，ある $\hat{u}_i^a$ がゼロであるならば，(15)よりすべての $\hat{u}_i^a$ はゼロでなければならず，これより目的関数(7)の値はゼロになり，定理Ⅱより主問題の目的関数(5)の値はゼロでなければならない．しかし，これは(1)が過剰決定であることと矛盾する．したがって，

(19−1)　$$\hat{u}_i^a \neq 0 \qquad (i=1,\cdots,n+1)$$

でなければならない．同様に，下からの片側近似問題の双対問題の最適解も

(19−2)　$$\hat{u}_i^b \neq 0 \qquad (i=1,\cdots,n+1)$$

でなければならない．

主問題(5)−(6)の最適解において $\hat{e}_k > 0$ である番号 k が存在するから，定理Ⅳより双対問題の制約条件(8)の k 番目の不等式は等号で成立しなければならない．したがって，(8)の n 個の方程式とともに

(20−1)　$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}\hat{u}_i^a = 0 \quad (j=1,\cdots,n), \quad \hat{u}_k^a = 1$$

となる．下からの片側近似問題の最適解において $\hat{d}_k > 0$ と仮定すると，同様に

(20−2)　$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}\hat{u}_i^b = 0 \quad (j=1,\cdots,n), \quad \hat{u}_k^b = 1$$

となる．(20−1)から(20−2)を引くと，

(21)　$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}(\hat{u}_i^a - \hat{u}_i^b) = 0 \qquad (j=1,\cdots,n)$$

をえる．(20−1)と(20−2)より $\hat{u}_k^a = \hat{u}_k^b \neq 0$ であり，(13)と(19)に注意すると，(21)より

(22)　$$\hat{u}_i^a = \hat{u}_i^b \neq 0 \qquad (i=1,\cdots,n+1)$$

をえる．

他方，定理Ⅱより上からの片側近似問題の目的関数(5)の最小値とこの双対問題の目的関数(7)の最大値は等しいから，(1)が過剰決定であることより

(23)　$$\sum_{i=1}^{n+1} \hat{e}_i = \sum_{i=1}^{n+1} b_i\hat{u}_i^a > 0$$

が成立する．同様に，下からの片側近似問題の目的関数(9)の最小値とこの双対問題の目的関数(11)の最大値は等しいから，(22)を用いて

(24)　$$\sum_{i=1}^{n+1} \hat{d}_i = -\sum_{i=1}^{n+1} b_i\hat{u}_i^b = -\sum_{i=1}^{n+1} b_i\hat{u}_i^a > 0$$

が成立する．しかし，(23)と(24)は矛盾している．したがって，$\hat{e}_k > 0$ ならば $\hat{d}_k > 0$ であることはなく，$\hat{d}_k = 0$ でなければならない．

同様に，$\hat{d}_k > 0$ ならば $\hat{e}_k = 0$ でなければならない．　□

定理4． 上からの片側 L_1 近似問題(5)−(6)に実行可能解が存在しないための必要十分条件は，下からの片側 L_1 近似問題の双対問題(11)−(12)にすべての $\hat{u}_i^b$ が正である，すなわち

(25)　$$\hat{u}_i^b > 0 \qquad (i=1,\cdots,n+1)$$

である最適解が存在することである．同様に，下からの片側 L_1 近似問題(9)−(10)に実行可能解が存在しないための必要十分条件は，上からの片側 L_1 近似問題の双対問題(7)−(8)に

(26)
$$\hat{u}_i^a > 0 \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$
である最適解が存在することである．

証明．この定理の前半部分と後半部分の証明は同じようにできるので，前半部分の証明だけを行う．

（十分性）　定理 1 に注意して下からの片側近似問題 (9)−(10) の双対問題 (11)−(12) に (25) を満たす最適解が存在すると仮定すると，定理 II よりこの主問題にも最適解が存在する．(1) が過剰決定であることと制約条件 (10) よりすべての d_i が非負であることから，主問題の目的関数 (9) の値は正であり，定理 II よりこれは双対問題の目的関数 (11) の値と等しいので，

(27)
$$\sum_{i=1}^{n+1} \hat{d}_i = -\sum_{i=1}^{n+1} b_i \hat{u}_i^b > 0$$
でなければならない．また，(25) より $\theta < 0$ である任意の θ に対して
$$\theta \hat{u}_i^b < 0 \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$
となり，$\hat{u}_i^b$ が (12) の実行可能解であるから，これらの $\theta \hat{u}_i^b$ も (12) の実行可能解である．２つの制約条件 (8) と (12) は同一であるから，これらの $\theta \hat{u}_i^b$ は (8) の実行可能解でもある．これらの $\theta \hat{u}_i^b$ に対する目的関数 (7) の値は，(27) と $\theta < 0$ より

(28)
$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i \theta \hat{u}_i^b > 0$$
である．負である限り θ は任意であるから，(28) を考慮すると，(8) の実行可能解 $\theta \hat{u}_i^b$ に対して目的関数 (7) の値を
$$\lim_{\theta \to -\infty} \sum_{i=1}^{n+1} b_i \theta \hat{u}_i^b = +\infty$$
とすることができる．この事実と定理 III より主問題 (5)−(6) に実行可能解が存在しない．

（必要性）　上からの片側近似問題 (5)−(6) に実行可能解が存在しないと仮定する．この双対問題 (7)−(8) には実行可能解が存在するので，定理 III より目的関数 (7) の値を無限に大きくできる．制約条件 (8) の n 個の方程式の解の関係を表した (15) より u_i^a は乗数倍は別にして一意に定まり，これらは (8) の実行可能解であることから，すべての i について $u_i^a \leqq 1$ でなければならない．目的関数 (7) の値を無限に大きくできるのは
$$u_i^a \to -\infty \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$
であるときに限り可能である．これより制約条件 (8) の実行可能解はすべて同符号でなければならない．このことより制約条件 (8) と全く同じ制約条件 (12) にもすべて同じ符号をもつ実行可能解が存在する．このとき，上からの片側近似問題 (5)−(6) に最適解が存在しないなら，定理 1 より下からの片側近似問題 (9)−(10) に最適解が存在し，定理 II よりこの双対問題 (11)−(12) に最適解が存在する．さらに，(1) が過剰決定であることより下からの片側近似問題 (9)−(10) の最適解において少なくとも 1 つの番号 k について $\hat{d}_k > 0$ であるから，定理 IV より $\hat{d}_k$ に対応する制約条件 (12) の k 番目の不等が等号で成立し，$\hat{u}_k^b = 1$ となる．すべての $\hat{u}_i^b$ は同符号でなければならず，$\hat{u}_k^b > 0$ であるから，(25) をえる．　□

定理 5．上からの片側 L_1 近似問題 (5)−(6) に最適解が存在するための必要十分条件は，下からの

片側 L_1 近似問題の双対問題 (11)−(12) に

(29)
$$u_i^b > 0, \quad u_j^b < 0$$

を満たす実行可能解が存在することである．同様に，下からの片側 L_1 近似問題 (9)−(10) に最適解が存在するための必要十分条件は，上からの片側 L_1 近似問題の双対問題 (7)−(8) に

(30)
$$u_i^a > 0, \quad u_j^a < 0$$

を満たす実行可能解が存在することである．

証明． 定理4の対偶より結論をえる． □

定理6． 上からの片側 L_1 近似問題 (5)−(6) と下からの片側 L_1 近似問題 (9)−(10) に最適解が存在すると仮定する．このとき，上からの片側 L_1 近似問題の双対問題 (7)−(8) の最適解 $\hat{u}_i^a$ と下からの片側 L_1 近似問題の双対問題 (11)−(12) の最適解 $\hat{u}_i^b$ の間に

(31)
$$\hat{u}_i^a = \frac{\hat{u}_i^b}{\min\limits_{i=1,\cdots,n+1} \hat{u}_i^b} \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$

(32)
$$\hat{u}_i^b = \frac{\hat{u}_i^a}{\min\limits_{i=1,\cdots,n+1} \hat{u}_i^a} \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$

という関係が成立する．

証明． 仮定により上からと下からの片側 L_1 近似問題 (5)−(6) と (9)−(10) に最適解が存在するから，定理Ⅱより各々の双対問題 (7)−(8) と (11)−(12) に最適解が存在する．定理3の (19) よりすべての $\hat{u}_i^a$ と $\hat{u}_i^b$ はゼロではなく，これら2つの双対問題の最適解は各々 (15) を満たし，乗数倍は別にして一意に定まる．したがって，ある実数 η に対して

(33)
$$\hat{u}_i^b = \eta \hat{u}_i^a \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$

という関係が成立する．各々の近似問題の最適解に対する誤差 $\hat{e}_i$ と $\hat{d}_i$ は，(1) が過剰決定であるから，定理Ⅱと (33) より

(34)
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \hat{e}_i &= \sum_{i=1}^{n+1} b_i \hat{u}_i^a > 0 \\ \sum_{i=1}^{n+1} \hat{d}_i &= -\sum_{i=1}^{n+1} b_i \hat{u}_i^b = -\eta \sum_{i=1}^{n+1} b_i \hat{u}_i^a > 0 \end{aligned}$$

が成立する．(34) より

(35)
$$\eta < 0$$

でなければならない．また，(34) より少なくとも1つの $\hat{e}_i$，たとえば $\hat{e}_k$ は正であるから，定理Ⅳより双対問題の制約条件 (8) の k 番目の不等式は等号で成立する．したがって，(8) の不等式より

(36)
$$\hat{u}_i^a \leqq 1 \quad (i = 1, \cdots, n+1), \quad \hat{u}_k^a = 1$$

が成立する．同様に，下からの片側近似問題の双対問題の制約条件 (12) において

(37)
$$\hat{u}_i^b \leqq 1 \quad (i = 1, \cdots, n+1), \quad \hat{u}_m^b = 1$$

が成立する．(33) と (36) より

(38)
$$\hat{u}_i^a = \frac{1}{\eta}\hat{u}_i^b \leqq 1 \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$
$$\hat{u}_k^a = \frac{1}{\eta}\hat{u}_k^b = 1$$

をえる．(35) と (38) より

(39)
$$\hat{u}_i^b \geqq \eta = \hat{u}_k^b \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$

が成立する．(39) は η が $\hat{u}_i^b$ の最小値，すなわち

$$\eta = \min_{i=1,\cdots,n+1} \hat{u}_i^b$$

に等しいことを意味する．これと (38) より (31) がえられる．

同様に，(33) と (37) より

(40)
$$\hat{u}_i^b = \eta\hat{u}_i^a \leqq 1 \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$
$$\hat{u}_m^b = \eta\hat{u}_m^a = 1$$

をえる．(35) と (40) より

(41)
$$\hat{u}_i^a \geqq \frac{1}{\eta} = \hat{u}_m^a \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$

が成立する．(41) より $\hat{u}_m^a$ は $\hat{u}_i^a$ の最小値であり，

$$\eta = \frac{1}{\min\limits_{i=1,\cdots,n+1} \hat{u}_i^a}$$

である．したがって，これと (40) より (32) がえられる．　□

定理７． 上からと下からの片側 L_1 近似問題 (5)−(6) と (9)−(10) に最適解が存在するとき，双対問題 (7)−(8) の最適解 $\hat{u}_i^a$ と (11)−(12) の最適解 $\hat{u}_i^b$ との間に

(42)
$$\left(\min_{i=1,\cdots,n+1} \hat{u}_i^a\right)\left(\min_{i=1,\cdots,n+1} \hat{u}_i^b\right) = 1$$

という関係が成立する．

証明． 定理６の (31) と (32) より (42) をえる．　□

定理８． 上からの片側 L_1 近似問題 (5)−(6) に最適解が存在するとき，双対問題 (7)−(8) の最適解に

(43)
$$\hat{u}_i^a < 1 \quad (i = 1, \cdots, n+1 ; i \neq k), \quad \hat{u}_k^a = 1$$

が成立する唯一の番号 k が存在するなら，上からの片側 L_1 近似問題の最適解は一意である．

同様に，下からの片側 L_1 近似問題 (9)−(10) に最適解が存在するとき，双対問題 (11)−(12) の最適解に

(44)
$$\hat{u}_i^b < 1 \quad (i = 1, \cdots, n+1 ; i \neq m), \quad \hat{u}_m^b = 1$$

が成立する唯一の番号 m が存在するなら，下からの片側 L_1 近似問題の最適解は一意である．

また，上からと下からの近似問題 (5)−(6) と (9)−(10) に同時に最適解が存在するとき，(43) の k と (44) の m は等しくなく，

(45)
$$k \neq m$$

である．

証明． 上からの近似問題(5)−(6)に最適解が存在し，双対問題(7)−(8)の最適解が(43)を満たすとする．制約条件(8)の不等式の最適なスラック変数の値を $\hat{s}_i$ とすると，

$$\hat{u}_i^a + \hat{s}_i = 1 \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$

となり，(43)より

(46) $$\hat{s}_k = 0, \quad \hat{s}_i > 0 \qquad (i = 1, \cdots, n+1 ; i \neq k)$$

である．また，定理3の証明における(19−1)より

(19′) $$\hat{u}_i^a \neq 0 \qquad (i = 1, \cdots, n+1)$$

である．制約条件(8)には非負性の条件を除いて全部で $2n+1$ 個の制約式があり，ゼロでない最適な双対変数は(19′)の $n+1$ 個の $\hat{u}_i^a$ と(46)の n 個の $\hat{s}_i$ で，合計 $2n+1$ 個の変数がゼロではない．したがって，双対問題の最適解は退化しておらず，定理Ⅴより主問題の最適解は一意である．

(44)が成立するときも同様に証明できる．

次に，(45)を証明する．(43)が成立するとき，定理Ⅳに注意すると主問題(5)−(6)の最適解において $\hat{e}_k > 0$ である．何故ならもし $\hat{e}_k = 0$ であるなら，(1)が過剰決定であることより，$\hat{e}_j > 0$ となる k と異なる j が存在し，定理Ⅳより $\hat{u}_j^a = 1$ となるが，これは $\hat{u}_k^a = 1$ が唯一の番号 k によって達成されるという仮定に反する．したがって，$\hat{e}_k > 0$ である．このとき，仮定に反してもし $k = m$ であるなら，(44)より $\hat{u}_k^b = 1$ となり，今考察したことと同じ理由で主問題(9)−(10)の最適解において $\hat{d}_k > 0$ となる．しかし，これは定理3に矛盾する．したがって，(45)が成立する．　□

5．数値例

本節で数値例を2題取り上げる．

例題1． 次の過剰決定の連立方程式

(47) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6 \\ -x_1 + 2x_2 &= 6 \\ 5x_1 - x_2 &= 24 \end{aligned}$$

の片側 L_1 近似解を求める．

(47)の各々の方程式に対する誤差を

$$\begin{aligned} e_1 &= 6 - x_1 - x_2 \\ e_2 &= 6 + x_1 - 2x_2 \\ e_3 &= 24 - 5x_1 + x_2 \end{aligned}$$

と定める．上からの片側 L_1 近似問題は，

(48) $$e_1 + e_2 + e_3$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$
(49)\qquad
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + e_1 &= 6\\
-x_1 + 2x_2 + e_2 &= 6\\
5x_1 - x_2 + e_3 &= 24\\
e_i \geqq 0 \qquad (i &= 1,\ 2,\ 3)
\end{aligned}
$$

と表せる．主問題 (48)−(49) の最適解は，

$$
(50)\qquad \hat{x}_1 = 5,\quad \hat{x}_2 = 1,\quad \hat{e}_1 = 0,\quad \hat{e}_2 = 9,\quad \hat{e}_3 = 0
$$

である．制約条件 (49) で示される実行可能解は第 1 図の斜線の領域 A であり，最適解 (50) は点 L_1^a で示される．

主問題 (48)−(49) に対する双対問題は，

$$
(51)\qquad 6u_1^a + 6u_2^a + 24u_3^a
$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$
(52)\qquad
\begin{aligned}
u_1^a - u_2^a + 5u_3^a &= 0\\
u_1^a + 2u_2^a - u_3^a &= 0\\
u_i^a \leqq 1 \qquad (i &= 1,\ 2,\ 3)
\end{aligned}
$$

と表せる．双対問題 (51)−(52) の最適解は，

$$
(53)\qquad \hat{u}_1^a = -\frac{3}{2},\quad \hat{u}_2^a = 1,\quad \hat{u}_3^a = \frac{1}{2}
$$

である．

次に，(47) に対する下からの片側 L_1 近似問題は，整理すると，

$$
(54)\qquad d_1 + d_2 + d_3
$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$
(55)\qquad
\begin{aligned}
-x_1 - x_2 + d_1 &= -6\\
x_1 - 2x_2 + d_2 &= -6\\
-5x_1 + x_2 + d_3 &= -24\\
d_i \geqq 0 \qquad (i &= 1,\ 2,\ 3)
\end{aligned}
$$

と表せる．主問題 (54)−(55) の最適解は，

$$
(56)\qquad \hat{x}_1 = 6,\quad \hat{x}_2 = 6,\quad \hat{d}_1 = 6,\quad \hat{d}_2 = 0,\quad \hat{d}_3 = 0
$$

である．制約条件 (55) で示される実行可能解は第 1 図の斜線の領域 B であり，最適解 (56) は点 L_1^b で示される．

主問題 (54)−(55) に対する双対問題は，

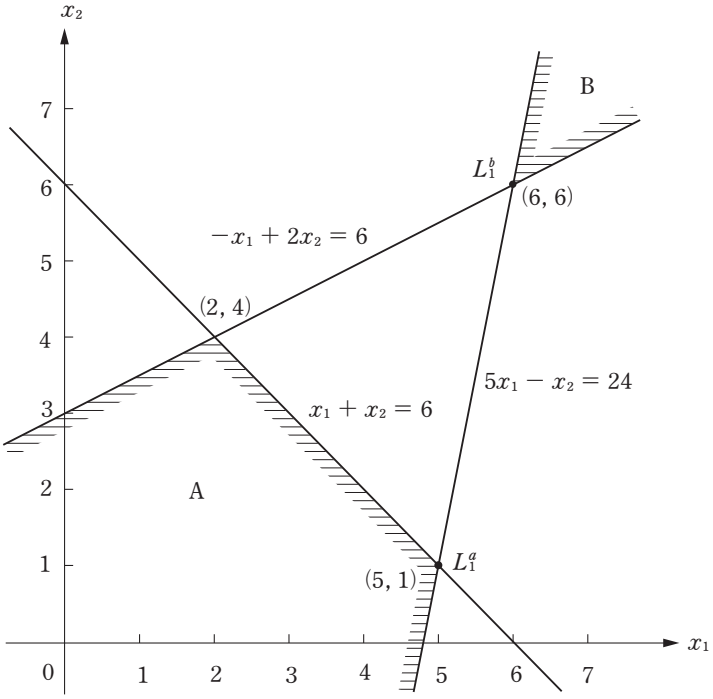
$$
(57)\qquad -6u_1^b - 6u_2^b - 24u_3^b
$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$
(58)\qquad
\begin{aligned}
u_1^b - u_2^b + 5u_3^b &= 0\\
u_1^b + 2u_2^b - u_3^b &= 0\\
u_i^b \leqq 1 \qquad (i &= 1,\ 2,\ 3)
\end{aligned}
$$

と整理して表せる．双対問題 (57)−(58) の最適解は，

$$
(59)\qquad \hat{u}_1^b = 1,\quad \hat{u}_2^b = -\frac{2}{3},\quad \hat{u}_3^b = -\frac{1}{3}
$$



第1図

である．

上からと下からの片側近似問題の最適解(50)と(56)において定理3が示すように $\hat{e}_2 > 0$ であるとき $\hat{d}_2 = 0$ であり，$\hat{d}_1 > 0$ であるとき $\hat{e}_1 = 0$ である．上からの片側近似問題の双対問題(51)−(52)の最適解(53)に対して(30)が成立しており，下からの片側近似問題の双対問題(57)−(58)の最適解(59)に対して(29)が成立している．したがって，定理5より上からと下から両方の片側近似問題に最適解が存在する．2つの双対問題の最適解(53)と(59)より

$$\min_{i=1,2,3} \hat{u}_i^a = \min\left(-\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$
$$\min_{i=1,2,3} \hat{u}_i^b = \min\left(1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} \tag{60}$$

である．(60)より

$$\hat{u}_1^a = \frac{\hat{u}_1^b}{\min\limits_{i=1,2,3} \hat{u}_i^b} = \frac{1}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

$$\hat{u}_2^a = \frac{\hat{u}_2^b}{\min\limits_{i=1,2,3} \hat{u}_i^b} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}} = 1$$

$$\hat{u}_3^a = \frac{\hat{u}_3^b}{\min\limits_{i=1,2,3} \hat{u}_i^b} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

であるから，定理６の(31)が成立し，同様に(32)が成立している．また，(60)より

$$\left(\min_{i=1,2,3} \hat{u}_i^a\right)\left(\min_{i=1,2,3} \hat{u}_i^b\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = 1$$

であり，定理７の(42)が成立している．さらに，上からの片側近似問題の双対問題(51)−(52)の最適解(53)において $\hat{u}_k^a = 1$ であるのは $k = 2$ のときだけであり，下からの片側近似問題の双対問題(57)−(58)の最適解(59)において $\hat{u}_m^b = 1$であるのは $m = 1$ のときだけであり，$k \neq m$ で定理８の(45)が成立し，各々の片側近似問題の最適解(50)と(56)は一意である．

例題２． 次の過剰決定の連立方程式

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 3 \\ -3x_1 - 5x_2 &= -15 \\ 3x_1 + x_2 &= 15 \end{aligned} \tag{61}$$

の片側 L_1 近似解を求める．

(61)の各々の方程式に対する誤差を

$$\begin{aligned} e_1 &= 3 + x_1 - x_2 \\ e_2 &= -15 + 3x_1 + 5x_2 \\ e_3 &= 15 - 3x_1 - x_2 \end{aligned}$$

とする．上からの片側 L_1 近似問題は，

$$e_1 + e_2 + e_3 \tag{62}$$

を次の制約条件の下で最小にする

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + e_1 &= 3 \\ -3x_1 - 5x_2 + e_2 &= -15 \\ 3x_1 + x_2 + e_3 &= 15 \\ e_i &\geqq 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \end{aligned} \tag{63}$$

と表せる．主問題(62)−(63)の実行可能解は第２図の斜線の領域Ａである．最適解は

$$\hat{x}_1 = 5,\quad \hat{x}_2 = 0,\quad \hat{e}_1 = 8,\quad \hat{e}_2 = 0,\quad \hat{e}_3 = 0 \tag{64}$$

であり，第２図の点 L_1^a で示される．この双対問題は，

$$3u_1^a - 15u_2^a + 15u_3^a \tag{65}$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$\begin{aligned} u_1^a + 3u_2^a - 3u_3^a &= 0 \\ -u_1^a + 5u_2^a - u_3^a &= 0 \\ u_i^a &\leqq 1 \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \end{aligned} \tag{66}$$

と表せる．この双対問題の最適解は，

$$\hat{u}_1^a = 1,\quad \hat{u}_2^a = \frac{1}{3},\quad \hat{u}_3^a = \frac{2}{3} \tag{67}$$

である．上からの片側 L_1 近似問題の双対問題(65)−(66)の最適解(67)においてすべての $\hat{u}_i^a > 0$ であるから，定理４の(26)を満たし，したがって下からの片側 L_1 近似問題に実行可能解が存在しない．

次に，(61) の下からの片側 L_1 近似問題は，

(68)
$$d_1 + d_2 + d_3$$

を次の制約条件の下で最小にする

(69)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + d_1 &= -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + d_2 &= 15 \\ -3x_1 - x_2 + d_3 &= -15 \\ d_i \geqq 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \end{aligned}$$

と表せる．既に定理4に関連して述べたように，この下からの片側近似問題に実行可能解が存在しない．主問題 (68)−(69) に対する双対問題は，

(70)
$$-3u_1^b + 15u_2^b - 15u_3^b$$

を次の制約条件の下で最大にする

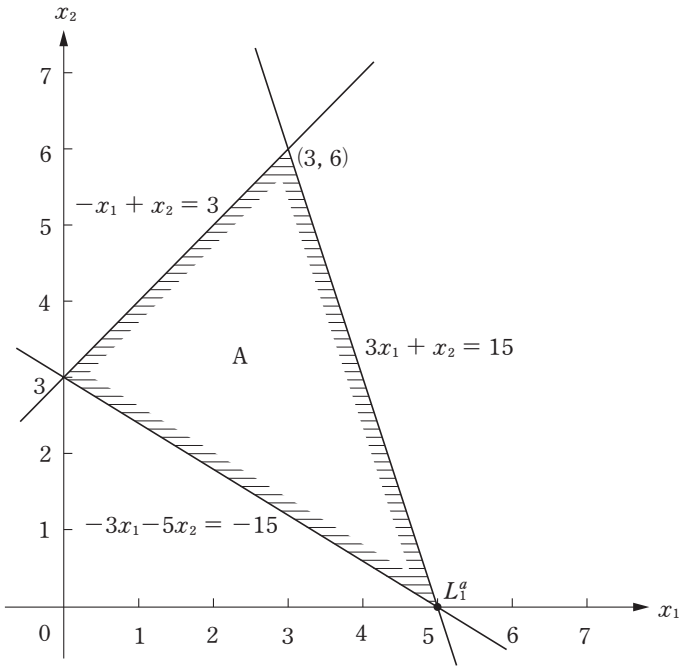
(71)
$$\begin{aligned} u_1^b + 3u_2^b - 3u_3^b &= 0 \\ -u_1^b + 5u_2^b - u_3^b &= 0 \\ u_1^b \leqq 1 \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \end{aligned}$$

と表せる．この双対問題には，$\theta \leqq 1$ である任意の θ に対して

(72)
$$u_1^b = \theta,\quad u_2^b = \frac{\theta}{3},\quad u_3^b = \frac{2}{3}\theta$$

という実行可能解が存在し，実行可能解 (72) に対する目的関数 (70) の値を

$$\lim_{\theta \to -\infty} (-3u_1^b + 15u_2^b - 15u_3^b) = \lim_{\theta \to -\infty} (-8\theta) = +\infty$$



第2図

とすることができ，定理Ⅲより主問題(68)−(69)に実行可能解が存在しないことがやはり確認できる．

参考文献

［1］Bertsimas, D., and Tsitsiklis, J. N., *Introduction to Linear Optimization*. Belmont, Mass.: Athena Scientific, 1997.

［2］Calvert, J. E., and Voxman, W. L., *Linear Programming*. Orlando, Florida: Harcourt Brace Jovanovich, 1989.

［3］Chvátal, V., *Linear Programming*. New York: W. H. Freeman and Co., 1983.

［4］Collatz, L., and Wetterling, W., *Optimization Problems*, trans. P. Wadsack. New York: Springer-Verlag, 1975.

［5］Cooper, L., and Steinberg, D., *Methods and Applications of Linear Programming*. Philadelphia, Penn.: W. B. Saunders Co., 1974.

［6］Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1963.

［7］Dantzig, G. B., and Thapa, M. N., *Linear Programming*. 1: *Introduction*. New York: Springer-Verlag, 1997.

［8］Gale, D., *The Theory of Linear Economic Models*. New York: McGraw-Hill Book Co., 1960.

［9］Gass, S. I., *Linear Programming: Methods and Applications*. Fifth Ed., New York: McGraw-Hill Book Co., 1985.

［10］Hadley, G., *Linear Programming*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1962.

［11］Kolman, B., and Beck, R. E., *Elementary Linear Programming with Applications*. Second Ed., San Diego, Calif.: Academic Press, 1995.

［12］Krekó, B., *Linear Programming*, trans. J. H. L. Ahrens and C. M. Safe. London: Sir Isaac Pitman & Sons, 1968.

［13］Murty, K. G., *Linear Programming*. New York: John Wiley & Sons, 1983.

［14］Watson, G. A., "On the Best Linear One-Sided Chebyshev Approximation," *Journal of Approximation Theory*, Vol. 7 (1973), pp. 48–58.

［15］Watson, G. A., "One-Sided Approximation and Operator Equations," *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*, Vol. 12 (1973), pp. 197–208.

［16］Watson, G. A., "The Calculation of Best Linear One-Sided L_p Approximations," *Mathematics of Computation*, Vol. 27 (1973), pp. 607–20.