Leslie 行列モデルにおける収穫と成長

尾　崎　雄一郎

１．はじめに

Lewis［13］は，ある動物を年令によって幾つかのクラスに分け，１個体当りの平均的出産数と生存率が年令にのみ依存すると仮定し，これらを表す行列によってこの動物の年令構成などを考察し，Leslie［11］，［12］も同じ行列を用いて動物の個体数の変動や年令構成などを詳しく分析した．年令にのみ依存する平均的出産数や生存率を表すこの行列は Leslie 行列と呼ばれ，生態学や人口学などで利用される．Anton and Rorres［１］[1] は Leslie 行列に基づいた個体数の変動や収穫を非負行列の固有値問題の観点から考察した．

Doubleday［６］は Leslie 行列ばかりでなく，一般的な非負行列を用いて期首における各クラスの個体数を毎期一定に維持しつつ期末の収穫からえられる総収入を最大にする問題や期首の収穫からえられる総収入を最大にする問題をリニアー・プログラミングの問題として定式化した．彼はこの論文で期末の収穫からえられる総収入が期首の収穫からえられる総収入より大きいか, 等しいこと，また各クラスの個体の価格が等しい場合には期末収穫問題と期首収穫問題の収穫するクラスが同じになることなどを証明した．尾崎［16］は，Leslie 行列の下で Doubleday とは異なった方法で問題を定式化し，期末収穫問題の総収入が期首収穫問題の総収入より大きいのはこれらの総収入がともに正であるときに限り，期末収穫問題と期首収穫問題の総収入が等しいのはともにゼロであるときに限ることなどを証明した．尾崎［17］は，同様な方法で Leslie 行列に基づく収穫問題を定式化し，期末収穫問題，期首収穫問題やこれらの双対問題の最適解を一般的に求め，尾崎・永田［18］は，期末収穫問題を期首収穫問題と同じ形式の問題に，逆に期首収穫問題を期末収穫問題と同じ形式の問題に変換する方法を見出し，これらの変換に基づいて期末収穫問題の目的関数の最大値が期首収穫問題の目的関数の最大値以上であることなど多くのことを証明した．

Leslie 行列を用いたリニアー・プログラミングによる収穫問題を扱ったこれらの論文はすべて各クラスの期首における個体数を毎期一定に維持するという条件の下で考察しているのに対して，本論文では期首における各クラスの個体数が毎期一定率で成長するという条件の下で，期末や期首の収穫からえられる総収入を最大にする問題について考察する．また，この収穫と成長を同時に扱うモデルにおいて許容しうる最大の成長率や，許容範囲内で成長率が高くなればなるほど，収穫からえられる最大の総収入が減少することなどを明らかにする．

２．成長を伴う期末収穫問題

[1] Pp. 625-46.

ある動物の雌を年令の最も若い1番目のクラスから最も年をとった n 番目のクラスまで等しい年令間隔で n 個のクラスに分け，年令間隔に相当する時間間隔を考察期間とする．1期間経過する間に i 番目のクラスの雌1個体が出産する1番目のクラスの雌の平均的個体数を一定の a_i とし，

(1)
$$a_i \geqq 0 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

であり，i 番目のクラスの雌が $i+1$ 番目のクラスにまで生存できる平均的生存率を一定の b_i とし，

(2)
$$0 < b_i \leqq 1 \quad (i = 1, \cdots, n-1),\ b_n = 0$$

であるとする．(2)の $n-1$ 番目以下のクラスにおいて，もし $b_i = 0$ ならば，それより上のクラスへ生存できる個体は存在せず，それより上のクラスを設ける意味がなくなるので，$n-1$ 番目以下のクラスの b_i はすべて正であるとするが，n 番目のクラスについてはそれより上のクラスを設けていないので，n 番目のクラスからそれより上のクラスへ生存して移行することはなく，したがって $b_n = 0$ であるとする．これらをまとめた

(3)
$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

を Leslie 行列と言う．

期首における i 番目のクラスの個体数を x_i，群全体の数を一定の c，期末に i 番目のクラスから収穫する個体数を h_i，i 番目のクラスの1個体の価格を一定の p_i，Leslie 行列の許容範囲内で与えられた1期間当りの各クラスの個体数の成長率（増加率）を r，期末の収穫からえられる総収入を $f(r)$ とし，あらかじめ与えられた一定の成長率の下で期末の収穫からえられる総収入を最大にする問題を考察する．

期首におけるすべてのクラスの個体数の合計が所与の c に等しくなるためには

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$$

でなければならず，1期間経過する間にすべてのクラスから生まれてくる1番目のクラスの個体総数から期末に収穫し，その後に残った個体数が期首に存在していた1番目のクラスの個体数に加えて成長率 r に該当する数だけ増加するためには

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - h_1 = (1+r)x_1$$

でなければならない．$i-1$ 番目のクラスの個体については1期間経過した後このクラスの生存率に該当する数だけ生存して i 番目のクラスの個体となり，その i 番目のクラスの個体から期末に収穫し，その後に残った個体数が期首に存在していた i 番目のクラスの個体数に加えて成長率 r に該当する数だけ増加するためには，

$$b_{i-1}x_{i-1} - h_i = (1+r)x_i \quad (i = 2, \cdots, n)$$

でなければならず，変数 x_i と h_i はすべて非負でなければならない．

以上より期首における各クラスの個体数を毎期一定率で成長させつつ，期末に各クラスから収穫する個体数を一定の価格で販売することからえられる総収入を最大にする問題は，

(4)
$$f(r) = p_1h_1 + p_2h_2 + \cdots + p_nh_n$$
を次の制約条件の下で最大にする

(5)
$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n \qquad &= c \\
a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n - h_1 &= (1+r)x_1 \\
b_1x_1 \qquad - h_2 &= (1+r)x_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
b_{n-1}x_{n-1} \qquad - h_n &= (1+r)x_n
\end{aligned}$$
$$x_i \geqq 0, \quad h_i \geqq 0 \quad (i = 1, \cdots, n)$$
というリニアー・プログラミングの問題として表せる.

3．成長を伴う期末収穫問題における基本的な定理

２つの任意の n 次元ベクトル $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ に対して
$$\begin{aligned}
&x_i \geqq y_i \quad (i = 1, \cdots, n) \text{ ならば,} && x \geqq y \\
&x_i \geqq y_i \quad (i = 1, \cdots, n),\ x \neq y \text{ ならば,} && x \geq y \\
&x_i > y_i \quad (i = 1, \cdots, n) \text{ ならば,} && x > y
\end{aligned}$$
と表す．非負の Leslie 行例 (3) に対する固有値問題

(6)
$$Lx = \lambda x,\ x \neq 0$$
の Frobenius 根を λ_L とするとき，次の補助定理が成立する.

補助定理１．(6) の Frobenius 根 λ_L は実数で，正であり，λ_L に属する固有ベクトル x も，実数で，正，すなわち
$$\lambda_L > 0,\ x > 0$$
である.

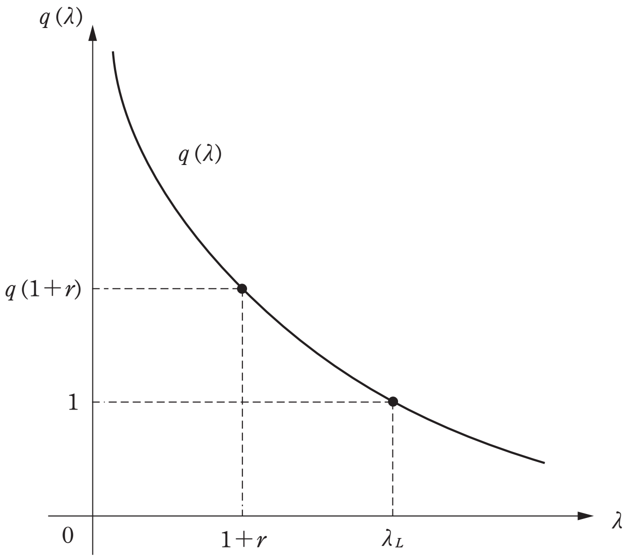
証明.[2] 単位行列を I とし，(6) の固有方程式
$$|\lambda I - L| = 0$$
を展開すると,

(7)
$$\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - \cdots - a_nb_1b_2 \cdots b_{n-1} = 0$$
となる．ここで,

(8)
$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2b_1}{\lambda^2} + \cdots + \frac{a_nb_1b_2 \cdots b_{n-1}}{\lambda^n} \quad (\lambda \neq 0)$$
とすると，(7) は

(9)
$$q(\lambda) = 1$$
と同値である．(1) と (2) に注意すると,
$$\lim_{\lambda \to 0} q(\lambda) = \infty,\ \lim_{\lambda \to \infty} q(\lambda) = 0$$
であり，$\lambda > 0$ の範囲で連続，$q'(\lambda) < 0$，$q''(\lambda) > 0$ であるから，$q(\lambda)$ は 第１図のように下に凸な

[2] この証明は Anton and Rorres［１］, pp. 629-30 による.



第 1 図

狭義単調減少関数である．第 1 図からわかるように(9)が成立する正の実数 λ_L が存在する．Frobenius 根 λ_L に属する(6)の固有ベクトル x は，

$$x=\begin{bmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_L \\ b_1b_2/\lambda_L^2 \\ \vdots \\ b_1b_2\cdots b_{n-1}/\lambda_L^{n-1} \end{bmatrix}$$

であり，(2)と $\lambda_L>0$ より x は正の実ベクトルである．　□

Frobenius の定理を Leslie 行列に適用すると，次の補助定理をえる．

補助定理２．[3] 非負行列 L とある $x \geq 0$ に対して

$$Lx \geqq \mu x$$

が成り立つ実数 μ は，

$$\lambda_L \geqq \mu$$

を満たす．

補助定理３．[4] 最大化のリニアー・プログラミングの問題に最適解が存在するための必要十分条件は，空でない実行可能解の集合においてその目的関数の値が上に有界であることである．

---

[3] Beckmann and Künzi［２］, p. 104, Berman and Plemmons［３］, p. 28, Horn and Johnson［８］, p. 504, Kemp and Kimura［９］, p. 84, 二階堂［14］, p. 120, Nikaido［15］, p. 102, Woods［19］, p. 21 を参照.

これらの補助定理を用いて次の定理を証明する．

定理１． 成長を伴う期末収穫問題 (4)−(5) に最適解が存在するための必要十分条件は，

$$\lambda_L \geqq 1 + r \tag{10}$$

あるいは

$$\frac{a_1}{1+r} + \frac{a_2 b_1}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}{(1+r)^n} \geqq 1 \tag{11}$$

である．

証明． 最初に，

$$J = \left\{ x = (x_1, \cdots, x_n) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = c,\ x_i \geqq 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \right\}$$

と定め，(10) を証明する．問題 (4)−(5) に最適解が存在すると仮定すると，

$$h = Lx - (1+r)x \geqq 0,\ x \in J \tag{12}$$

である h が存在し，これより

$$Lx \geqq (1+r)x,\ x \in J \tag{13}$$

が成立する．(13) に補助定理２を適用すると，(10) をえる．

次に，(10) が成立すると仮定すると，任意の $x \in J$ に対して

$$\lambda_L x \geqq (1+r)x,\ x \in J \tag{14}$$

が成立し，L の固有値と固有ベクトルに対して

$$Lx = \lambda_L x \tag{6'}$$

であるから，(6′) と (14) より (13) が成立する x が存在する．(13) が成立するので，(12) が成立するように非負の h を定めることができ，(12) を満たす x と h は制約条件 (5) の実行可能解であり，(5) の最初の式よりすべての変数が有界であるから，補助定理３より問題 (4)−(5) に最適解が存在する．

次に，(11) を証明する．既に証明した (10) は，補助定理１の第１図から明らかなように

$$q(1+r) \geqq 1 \tag{15}$$

と同値である．(8) と (15) より (11) は問題 (4)−(5) に最適解が存在するための必要十分条件である．

□

成長率がゼロであるとき，最適解が存在するための必要十分条件は，(10) より

$$\lambda_L \geqq 1$$

であり，(11) より

$$a_1 + a_2 b_1 + \cdots + a_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1} \geqq 1$$

である．

成長を伴う期末収穫問題 (4)−(5) を

---

[4] Collatz and Wetterling［４］, p. 114, Dantzig［５］, pp. 134-5, Goldman and Tucker［７］, p. 60, Kolman and Beck［10］, pp. 174-5 を参照.

$$\alpha_i = \frac{a_i}{1+r},\ \beta_i = \frac{b_i}{1+r},\ y_i = \frac{h_i}{1+r} \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{16}$$

として整理すると，

$$f(r) = (1+r)(p_1 y_1 + p_2 y_2 + \cdots + p_n y_n) \tag{17}$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$\begin{aligned}
x_1 + \quad x_2 \quad \cdots + \quad x_{n-1} + \quad x_n \quad &= c \\
(1-\alpha_1)x_1 - \alpha_2 x_2 - \cdots - \alpha_{n-1}x_{n-1} - \alpha_n x_n + y_1 &= 0 \\
-\beta_1 x_1 + \quad x_2 \quad\quad\quad\quad\quad\quad + y_2 &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad & \\
-\beta_{n-1}x_{n-1} + \quad x_n + y_n &= 0 \\
x_i \geqq 0,\ y_i \geqq 0 \quad (i = 1, \cdots, n) &
\end{aligned} \tag{18}$$

と表せる．

尾崎［16］，［17］，尾崎・永田［18］において a_i，b_i，h_i を用いて表した成長を伴わない期末収穫問題とここで α_i，β_i，y_i を用いて表した成長を伴う期末収穫問題(17)−(18)と用いる記号の違いはあるが，表現形式は全く同じである．問題(17)−(18)と同じ形式で表した成長を伴わない期末収穫問題に最適解が存在するための必要十分条件を尾崎・永田［18］において証明したが，その必要十分条件を問題(17)−(18)に適用すると，

$$\alpha_1 + \alpha_2\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_1\beta_2\cdots\beta_{n-1} \geqq 1$$

と表せる．これに(16)を代入すると，成長を伴う期末収穫問題(4)−(5)に最適解が存在するための必要十分条件(11)がえられる．

定理２． 成長を伴う期末収穫問題(4)−(5)に最適解が存在するとき，最大可能な成長率 $r_{\max}$ は，

$$r_{\max} = \lambda_L - 1 \tag{19}$$

である．

証明． 定理１の(10)より直ちに(19)をえる．　□

成長を伴う期末収穫問題(4)−(5)において(10)を満たす２つの異なった成長率を r_1，r_2，これらの各々に対する実行可能な収穫を示すベクトルを $h(r_1)$，$h(r_2)$，これらの収穫ベクトルに対する目的関数の値を $f(r_1)$，$f(r_2)$，これらの最大値を $f^*(r_1)$，$f^*(r_2)$ と表すとき，次の定理が成立する．

定理３． 成長を伴う期末収穫問題(4)−(5)において

$$p_i > 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{20}$$

であるとする．(10)を満たす成長率が r_1 から r_2 に上昇する，すなわち

$$0 \leqq r_1 < r_2 \leqq r_{\max} \tag{21}$$

であるならば，目的関数(4)の最大値は減少する，すなわち

$$f^*(r_1) > f^*(r_2) \geqq 0 \tag{22}$$

が成立する．

証明. (21) を満たす成長率 r_2 と制約条件 (5) の実行可能な任意のベクトル x に対して

(23) $$h(r_2) = Lx - (1 + r_2)x \geqq 0,\ x \in J$$

が成立し，(21) を考慮すると，

(24) $$(1 + r_2)x \geq (1 + r_1)x,\ x \in J$$

であるから，同じ $x \in J$ に対して

(25) $$h(r_1) = Lx - (1 + r_1)x \geqq 0$$

となる．(25) から (23) を引き，(24) を用いると，

$$(1 + r_2)x - (1 + r_1)x = h(r_1) - h(r_2) \geq 0,\ x \in J$$

が成立するから，これより成長率 r_2 に対する (5) の任意の実行可能な x に対して

(26) $$h(r_1) \geq h(r_2)$$

が成立する．(21) を満たす r_1 と r_2 に対して

$$X(r_1) = \{x \mid Lx - (1 + r_1)x \geqq 0,\ x \in J\}$$
$$X(r_2) = \{x \mid Lx - (1 + r_2)x \geqq 0,\ x \in J\}$$

と定めると，いま示したように

$$X(r_2) \subset X(r_1)$$

が成立し，$x \in X(r_2)$ に対して (26) が成立する．各クラスの個体の価格から成り立つ行ベクトルを $p = (p_i)$ とすると，(20) より $p > 0$ であるから，(26) の両辺に左から p を掛けると，

(27) $$f(r_1) = ph(r_1) > ph(r_2) = f(r_2)$$

が成立する．他方，$x \in X(r_1)$ であるが $x \notin X(r_2)$ である x に対して (25) のように $h(r_1)$ が定まり，したがって $f(r_1)$ が定まるが，$f(r_1)$ の値がどのようなものであっても，(27) と矛盾するものではない．(27) とこの事実によって (22) が成立する．　□

補助定理４.[5] L が分解不能な非負行列であるとき，

$$Lx \geqq \lambda_L x,\ x \geq 0$$

であるならば，

$$Lx = \lambda_L x$$

である．

補助定理５.[6] L が分解不能な非負行列であるとき，

$$Lx = \mu x,\ \mu \geqq 0,\ x \geq 0$$

は

$$\mu = \lambda_L$$

以外に解をもたない．

---

[5] Horn and Johnson［８］, pp. 504-5 による．

[6] Beckmann and Künzi［２］, p. 105，二階堂［14］, p. 136，Woods［19］, p. 24 による．

定理４． 成長を伴う期末収穫 (4)−(5) において (20) が成立し，$r = r_{\max}$ であるとき，$a_n > 0$ であるなら，目的関数 (4) の最大値 $f^*(r_{\max})$ は，

(28) $$f^*(r_{\max}) = 0$$

であり，$a_n = 0$ であるなら，

(29) $$f^*(r_{\max}) > 0$$

である．

証明． (2) に注意すると，(3) の行列 L は $a_n > 0$ であるとき分解不能であり，(5) の実行可能解 $x \geq 0$ に対して

(30) $$Lx - (1 + r_{\max})x = h \geqq 0$$

が成立する．定理２の (19) より (30) は

$$Lx \geqq \lambda_L x,\ x \geq 0$$

と表せる．この式と補助定理４より (6′) が成立し，補助定理５より (6′) は λ_L 以外に解をもたないから，補助定理１の証明で示した正の固有ベクトルに対してのみ (6′) が成立する．このことより (30) には $h = 0$ 以外の非負の収穫ベクトルは存在しない．したがって，$r_{\max}$ であるときの最適な収穫ベクトル h^* はゼロでなければならず，これより (28) をえる．

次に，$a_n = 0$ であるとき，$r_{\max}$ に対して目的関数 (4) の値が正になる実行可能解が存在することを示せば，(29) を証明したことになる．議論の簡単化のために $a_{n-1} > 0$ であるとしても一般性は失われない．このとき，$\lambda_L > 0$ であるから，固有方程式 (7) は，

(7′) $$\lambda_L^{n-1} - a_1\lambda_L^{n-2} - \cdots - a_{n-1}b_1b_2\cdots b_{n-2} = 0$$

と表せる．ここで，

$$A = 1 + \frac{b_1}{\lambda_L} + \cdots + \frac{b_1b_2\cdots b_{n-2}}{\lambda_L^{n-2}} > 0$$

(31) $$x_1 = \frac{c}{A},\ x_2 = \frac{b_1c}{A\lambda_L}, \cdots,\ x_{n-1} = \frac{b_1b_2\cdots b_{n-2}c}{A\lambda_L^{n-2}},\ x_n = 0$$

$$h_1 = h_2 = \cdots = h_{n-1} = 0,\ h_n = \frac{b_1b_2\cdots b_{n-1}c}{A\lambda_L^{n-2}}$$

と定め，(7′) と (19) の $1 + r_{\max} = \lambda_L$ に注意すると，(31) は制約条件 (5) の実行可能解であり，目的関数 (4) の値は

$$f(r_{\max}) = \frac{p_nb_1b_2\cdots b_{n-1}c}{A\lambda_L^{n-2}} > 0$$

となる．したがって，(20) が成立するとき，(29) がえられる．□

４．成長を伴う期首収穫問題

期首における i 番目のクラスの収穫直前の個体数を x'_i，期首の収穫数を h'_i，期首の収穫直後に残った個体数を z_i，期首の収穫からえられる総収入を $f'(r)$ とし，[7] その他の記号は成長を伴う期末

[7] $f'(r)$ は成長率が r であるときの期首収穫問題の目的関数の値であって微分とは無関係である．

収穫問題と同じであるとする．

期首における収穫直前の各クラスの個体数の合計が所与の群全体の数に等しくなるためには

$$x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n = c$$

であり，期首の収穫直後に残った各クラスの個体から出産される1番目のクラスの総個体数が期首の収穫直前に存在していたこのクラスの個体数に加えて成長率 r で増加するためには

$$a_1(x'_1 - h'_1) + a_2(x'_2 - h'_2) + \cdots + a_n(x'_n - h'_n) = (1+r)x'_1$$

でなければならない．期首に $i-1$ 番目のクラスから収穫した後に残った個体は1期間経過すると所与の生存率に該当する数だけ生き残って i 番目のクラスの個体となるが，その数が i 番目のクラスの収穫直前の数に加えて成長率 r で増加するためには，

$$b_{i-1}(x'_{i-1} - h'_{i-1}) = (1+r)x'_i \quad (i = 2, \cdots, n)$$

でなければならず，また期首に各クラスから収穫する数はそのクラスに存在している期首の数以下で非負，すなわち

$$x'_i \geqq h'_i \geqq 0 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

でなければならない．これらの条件の下で各クラスの期首の収穫からえられる総収入を最大にする．

以上より毎期期首の収穫直前の各クラスの個体数を一定の率で成長させつつ，期首に各クラスから収穫を行うことによってえられる総収入を最大にする問題は，

(32)
$$f'(r) = p_1h'_1 + p_2h'_2 + \cdots + p_nh'_n$$

を次の制約条件の下で最大にする

(33)
$$\begin{aligned}
x'_1 \quad + \quad x'_2 \quad + \cdots + \quad x'_n \quad &= c \\
a_1(x'_1 - h'_1) + a_2(x'_2 - h'_2) + \cdots + a_n(x'_n - h'_n) &= (1+r)x'_1 \\
b_1(x'_1 - h'_1) \qquad\qquad\qquad\qquad &= (1+r)x'_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
b_{n-1}(x'_{n-1} - h'_{n-1}) &= (1+r)x'_n \\
x'_i \geqq h'_i \geqq 0 \quad (i = 1, \cdots, n) &
\end{aligned}$$

というリニアー・プログラミングの問題として表せる．

制約条件 (33) を次のように整理する．z_i の定義より

(34)
$$z_i = x'_i - h'_i \geqq 0 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

であるから，(34) を用いると(33) の2番目以降の n 個の方程式は，

(35)
$$\begin{aligned}
(1+r)x'_1 &= a_1z_1 + a_2z_2 + \cdots + a_nz_n \\
(1+r)x'_2 &= b_1z_1 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
(1+r)x'_n &= b_{n-1}z_{n-1}
\end{aligned}$$

と表せる．(2) の $b_n = 0$ を考慮し，(35) を (33) の最初の式と (34) に代入した式を表すと，

$$
(36)\quad
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} x'_i = \frac{1}{1+r}\{(a_1+b_1)z_1+(a_2+b_2)z_2+\cdots+(a_n+b_n)z_n\} = c\\
&h'_1 = x'_1 - z_1 = \frac{1}{1+r}\Big[\{a_1-(1+r)\}z_1 + a_2z_2+\cdots+a_nz_n\Big]\\
&h'_2 = x'_2 - z_2 = \frac{b_1}{1+r}z_1 - z_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&h'_n = x'_n - z_n = \frac{b_{n-1}}{1+r}z_{n-1} - z_n
\end{aligned}
$$

となる．さらに，

$$
(37)\qquad z'_i = \frac{z_i}{1+r} \geqq 0 \quad (i = 1, \cdots, n)
$$

と表すと，(36) と (37) より成長を伴う期首収穫問題 (32)－(33) は，

$$
(38)\qquad f'(r) = p_1h'_1 + p_2h'_2 + \cdots + p_nh'_n
$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$
(39)\quad
\begin{aligned}
&(a_1+b_1)z'_1 + (a_2+b_2)z'_2 + \cdots + (a_n+b_n)z'_n &&= c\\
&a_1z'_1 + a_2z'_2 + \cdots + a_nz'_n - h'_1 &&= (1+r)z'_1\\
&b_1z'_1 - h'_2 &&= (1+r)z'_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&b_{n-1}z'_{n-1} - h'_n &&= (1+r)z'_n\\
&z'_i \geqq 0,\ h'_i \geqq 0 \quad (i = 1, \cdots, n)
\end{aligned}
$$

と表せる．

成長を伴う期首収穫問題の制約条件 (39) は制約条件 (33) より不等式の数が n 個少なく，その上期末収穫問題の制約条件 (5) と比較すると，各々の制約条件の最初の式が異なるだけでそれ以外の式は記号の違いはあるが表現形式は全く同じである．

５．成長を伴う期首収穫問題における基本的な定理

成長を伴う期首収穫問題における基本的な定理を本節で証明する．

定理５． 成長を伴う期首収穫問題 (38)－(39) に最適解が存在するための必要十分条件は (10) あるいは (11) が成立することである．

証明． 第 i 成分が (37) の z'_i である n 次元列ベクトルを $z' = (z'_i)$ とし，

$$
K = \{\, z'_i \mid \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)z'_i = c,\ z' \geq 0 \,\}
$$

として，定理１の J の代りに K を用いれば，定理１と同様に証明できる．　□

定理６． 成長を伴う期首収穫問題 (38)－(39) における最大可能な成長率は (19) で与えられる．

証明． 定理５より成長を伴う期首収穫問題においても最適解が存在するための必要十分条件は

(10) であるので，(10) より (19) をえる． □

成長を伴う期首収穫問題 (38)−(39) において (10) を満たす２つの異なった成長率 r_1，r_2 に対する目的関数の値を $f'(r_1)$，$f'(r_2)$ とし，これらの最大値を $\hat{f}'(r_1)$，$\hat{f}'(r_2)$ とする．

定理７． 成長を伴う期首収穫問題 (38)−(39) において

(20) $$p_i > 0 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

であるとき，(10) を満たす成長率が r_1 から r_2 に上昇すると，目的関数 (38) の最大値は減少する，すなわち

(40) $$\hat{f}'(r_1) > \hat{f}'(r_2) \geqq 0$$

が成立する．

証明． 定理３と同様に証明できる． □

定理８． 成長を伴う期首収穫問題 (38)−(39) において (20) が成立し，$r = r_{\max}$ であるとき，$a_n > 0$ であるならば，目的関数 (38) の最大値 $\hat{f}'(r_{\max})$ は，

(41) $$\hat{f}'(r_{\max}) = 0$$

であり，$a_n = 0$ であるならば，

(42) $$\hat{f}'(r_{\max}) > 0$$

である．

証明． 第 i 成分が h'_i である n 次元列ベクトルを $h' = (h'_i)$ と表す．$a_n > 0$ であるとき，定理４の x と h を z' と h' で置き換えれば，定理４の証明と同様に (41) を証明できる．

$a_n = 0$ であるとき，簡単化のために $a_{n-1} > 0$ であるとすると，(7′) が成立する．定理４の証明と同様，制約条件 (39) に目的関数 (38) の値が正になる実行可能解が存在することを示せば，(42) を証明したことになる．いま，

$$B = b_1 + \frac{b_1 b_2}{\lambda_L} + \cdots + \frac{b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}{\lambda_L^{n-2}} > 0$$

とし，

(43)
$$z'_1 = \frac{c}{B + \lambda_L},\ z'_2 = \frac{b_1 c}{\lambda_L (B + \lambda_L)}, \cdots, z'_{n-1} = \frac{b_1 b_2 \cdots b_{n-2} c}{\lambda_L^{n-2}(B + \lambda_L)},\ z'_n = 0$$
$$h'_1 = h'_2 = \cdots = h'_{n-1} = 0,\ h'_n = \frac{b_1 b_2 \cdots b_{n-1} c}{\lambda_L^{n-2}(B + \lambda_L)}$$

と定める．(19) より $1 + r_{\max} = \lambda_L$ であることと，(7′) と B の定義に注意すると，(43) は制約条件 (39) の実行可能解であり，目的関数 (38) の値は，

$$f'(r_{\max}) = \frac{p_n b_1 b_2 \cdots b_{n-1} c}{\lambda_L^{n-2}(B + \lambda_L)} > 0$$

で，正になる．したがって，(42) が成立する． □

成長を伴う期首収穫問題 (32)−(33) は，問題 (38)−(39) のように表す以外に次のように表すこと

もできる．制約条件 (33) から導びかれた (35) の両辺を 1＋r で割って (16) を用いると，

(44)
$$\begin{aligned} x'_1 &= \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n \\ x'_2 &= \beta_1 z_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x'_n &= \beta_{n-1} z_{n-1} \end{aligned}$$

と表せ，(33) の最初の式と (44) より

(45)
$$\sum_{i=1}^{n} x'_i = (\alpha_1 + \beta_1) z_1 + (\alpha_2 + \beta_2) z_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) z_n = c$$

をえる．(2) より $b_n = 0$ であるから，(45) において $\beta_n = 0$ であり，(34) と (44) より

(46)
$$\begin{aligned} x'_1 &= z_1 + h'_1 = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n \\ x'_2 &= z_2 + h'_2 = \beta_1 z_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x'_n &= z_n + h'_n = \beta_{n-1} z_{n-1} \end{aligned}$$

である．したがって，問題 (32)−(33) は，(45) と (46) より

(47)
$$f'(r) = p_1 h'_1 + p_2 h'_2 + \cdots + p_n h'_n$$

を次の制約条件の下で最大にする

(48)
$$\begin{array}{rrrrrl} (\alpha_1 + \beta_1) z_1 & + (\alpha_2 + \beta_2) z_2 & + \cdots & + (\alpha_n + \beta_n) z_n & & = c \\ (1 - \alpha_1) z_1 & - \alpha_2 z_2 & - \cdots & - \alpha_n z_n & + h'_1 & = 0 \\ -\beta_1 z_1 & + z_2 & & & + h'_2 & = 0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & & \\ & & -\beta_{n-1} z_{n-1} & + z_n & + h'_n & = 0 \end{array}$$
$$z_i \geqq 0,\ h'_i \geqq 0 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

と表すことができる．

6．成長を伴う期末収穫問題と期首収穫問題の目的関数の関係

同じ成長率の下で成長を伴う期末収穫問題の総収入の最大値 $f^*(r)$ と期首収穫問題の総収入の最大値 $\hat{f}'(r)$ の関係を本節で明らかにする．

定理９．

$$a_n > 0,\ 0 \leqq r < \lambda_L - 1$$

であるか，あるいは

$$a_n = 0,\ 0 \leqq r \leqq \lambda_L - 1$$

であるとき，これらの仮定を満たす任意の r に対して

(49)
$$f^*(r) > \hat{f}'(r) > 0$$

が成立し，

$$a_n > 0,\ r = \lambda_L - 1$$

であるとき，

(50) $$f^*(r)=\hat{f}'(r)=0$$
が成立する．

証明．尾崎［16］，［17］，尾崎・永田［18］において $a_1+a_2b_1+\cdots+a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}>1$（これは $\lambda_L>1$ と同値）であり，$a_n\geqq 0$ であるか，あるいは $a_1+a_2b_1+\cdots+a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}=1$（これは $\lambda_L=1$ と同値）であり，$a_n=0$ であるとき，成長を伴わない期末収穫問題の総収入の最大値が期首収穫問題の総収入の最大値より大きく，ともに正であることと，$\lambda_L=1$，$a_n>0$ であるとき，これら２つの問題の総収入の最大値がともにゼロで，等しいことを各々異なった方法で証明した．本論文の α_i，β_i で表した成長を伴う期末収穫問題(17)−(18)と同じく成長を伴う期首収穫問題(47)−(48)の各々は，成長を伴わない期末収穫問題と期首収穫問題の各々と記号が異なるだけで表現形式は全く同じである．したがって，成長を伴う期末収穫問題と期首収穫問題の総収入の最大値の比較は成長を伴わない場合の結果を置き換えることによって(49)と(50)をえる．□

７．数値例

本節で数値例によって成長を伴う収穫問題の基本的な特徴を概観する．

例題．Leslie 行列と２つのクラスの個体の価格を

$$L=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1/2 & 0\end{bmatrix},\ p_1=1,\ p_2=8$$

とする(群全体の数 c と成長率 r は後に与える)．

成長を伴う期末収穫問題は，

(51) $$f(r)=h_1+8h_2$$
を次の制約条件の下で最大にする

(52) $$\begin{aligned} x_1+x_2 &= c\\ x_1+4x_2-h_1 &= (1+r)x_1\\ (1/2)x_1-h_2 &= (1+r)x_2\\ x_i\geqq 0,\ h_i\geqq 0 &\quad (i=1,\ 2)\end{aligned}$$

と表せる．非負行列 L の固有方程式は
$$\lambda^2-a_1\lambda-a_2b_1=\lambda^2-\lambda-2=(\lambda-2)(\lambda+1)=0$$
であるから，Frobenius 根 λ_L は
$$\lambda_L=2$$
である．これより問題(51)−(52)に最適解が存在する成長率 r は，定理１より

(53) $$0\leqq r\leqq\lambda_L-1=1$$
であり，このモデルの最大の成長率 $r_{\max}$ は，(53)より

(54) $$r_{\max}=1$$
である(定理２)．問題(51)−(52)の制約式を整理し，c と r をパラメーターとして解くと，最適解と

目的関数の最大値は，

(55)
$$x_1^* = \frac{4c}{4+r},\ x_2^* = \frac{rc}{4+r},\ h_1^* = 0,\ h_2^* = \frac{(2-r^2-r)\,c}{4+r}$$
$$f^*(r) = \frac{(16-8r^2-8r)\,c}{4+r} \quad (0 \leqq r \leqq 1)$$

となる．(55) より成長率が (53) の許容範囲内で上昇すると，目的関数の最大値 $f^*(r)$ は減少し（定理３），(54) が成立するとき $f^*(r_{\max}) = 0$ で定理 4 の (28) が成立している．

ここで，群全体の数を

$$c = 2{,}880$$

とし，成長率 r が 0, 0.5, 1 である場合の最適解と目的関数の最大値を (55) から求めると，

（ⅰ）　$r = 0$ であるとき，

$$x_1^* = 2{,}880,\ x_2^* = 0,\quad h_1^* = 0,\quad h_2^* = 1{,}440,\ f^*(0) = 11{,}520$$

（ⅱ）　$r = 0.5$ であるとき，

$$x_1^* = 2{,}560,\ x_2^* = 320,\ h_1^* = 0,\quad h_2^* = 800,\ f^*(0.5) = 6{,}400$$

（ⅲ）　$r = 1$ であるとき，

$$x_1^* = 2{,}304,\ x_2^* = 576,\ h_1^* = 0,\quad h_2^* = 0,\quad f^*(1) = 0$$

である．（ⅱ）の $r = 0.5$ である場合の最初の２期間について各クラスの個体数と収穫数の成長過程を模式図で表すと，第２図のようになる．

次に，成長を伴う期首収穫問題は，

(56)
$$f'(r) = h_1' + 8h_2'$$

を次の制約条件の下で最大にする

(57)
$$\begin{aligned} x_1' \quad &+ \quad x_2' &&= c \\ (x_1' - h_1') &+ 4(x_2' - h_2') &&= (1+r)x_1' \\ (1/2)(x_1' - h_1') & &&= (1+r)x_2' \end{aligned}$$
$$x_i' \geqq h_i' \geqq 0 \quad (i = 1,\ 2)$$

と表せる．制約条件 (57) を書き換えるために

(58)
$$z_i = x_i' - h_i' \geqq 0 \quad (i = 1,\ 2)$$

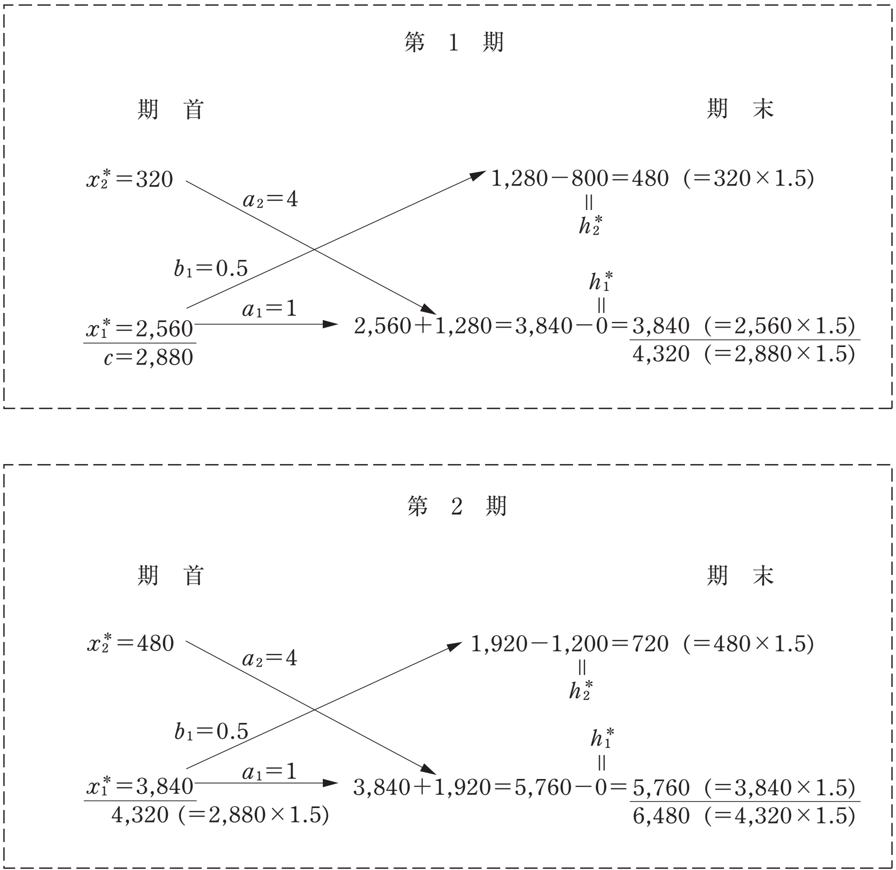
とすると，(57)の２番目と３番目の式は (58) を用いて

$$x_1' = \frac{z_1}{1+r} + \frac{4z_2}{1+r}$$

$$x_2' = \frac{1}{2}\cdot\frac{z_1}{1+r}$$

と表せる．これらの x_1' と x_2' を (57) の最初の式と (58) に代入すると，

(59)
$$x_1' + x_2' = \frac{3z_1}{2(1+r)} + \frac{4z_2}{1+r} = c$$
$$h_1' = x_1' - z_1 = \left(\frac{1}{1+r} - 1\right)z_1 + \frac{4z_2}{1+r}$$
$$h_2' = x_2' - z_2 = \frac{z_1}{2(1+r)} - z_2$$



第２図　$c=2{,}880$，$r=0.5$ のときの最初の２期間の期末収穫と成長

となる．(59) より問題 (56)−(57) は，

(60)
$$f'(r)=h_1'+8h_2'$$

を次の制約条件の下で最大にする

(61)
$$\begin{aligned}
\frac{3z_1}{2(1+r)}+\frac{4z_2}{1+r}\qquad\quad &= c\\
-\frac{rz_1}{1+r}\quad+\frac{4z_2}{1+r}-h_1' &= 0\\
\frac{z_1}{2(1+r)}\quad-z_2\quad-h_2' &= 0
\end{aligned}$$

$$z_i\geqq 0,\ h_i'\geqq 0\quad(i=1,\ 2)$$

と表せる．また，z_i' を

(62)
$$z_i'=\frac{z_i}{1+r}\geqq 0\quad(i=1,\ 2)$$

として (62) を (59) に代入し整理すると，問題 (56)−(57) は

(63)
$$f'(r)=h_1'+8h_2'$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$(64)\quad \begin{aligned} &(3/2)z'_1 + 4z'_2 = c \\ &z'_1 + 4z'_2 - h'_1 = (1+r)z'_1 \\ &(1/2)z'_1 - h'_2 = (1+r)z'_2 \\ &z'_i \geqq 0,\ h'_i \geqq 0 \quad (i=1,\ 2) \end{aligned}$$

と表すことができる．問題(63)−(64)に最適解が存在するための必要十分条件は定理5より(53)であり，最大の成長率は定理6より(54)である．

問題(60)−(61)の最適解と目的関数の最大値は，c と r をパラメーターとして解くと，

$$(65)\quad \begin{aligned} &\hat{z}_1 = \frac{2(r+1)c}{2r+3},\ \hat{z}_2 = \frac{r(r+1)c}{2(2r+3)},\ \hat{h}'_1 = 0,\ \hat{h}'_2 = \frac{(2-r^2-r)c}{2(2r+3)} \\ &\hat{f}'(r) = \frac{(8-4r^2-4r)c}{2r+3} \end{aligned}$$

であり，(58)と(65)より

$$(66)\quad \hat{x}_1 = \hat{z}_1 + \hat{h}'_1 = \frac{2(r+1)c}{2r+3},\ \hat{x}'_2 = \hat{z}_2 + \hat{h}'_2 = \frac{c}{2r+3}$$

となる．(53)で許容される範囲で成長率が上昇すると(65)の目的関数の最大値は減少し（定理7），成長率が(54)の $r_{\max} = 1$ であるとき $\hat{f}'(r_{\max}) = 0$ で定理8の(41)が成立している．さらに，(55)の $f^*(r)$ と(65)の $\hat{f}'(r)$ を比較すると，

$$f^*(r) - \hat{f}'(r) = \frac{4(3r+2)(r+2)(1-r)c}{(r+4)(2r+3)} \geqq 0 \quad (0 \leqq r \leqq 1)$$

であるから，定理9の(49)と(50)が成立している．ここで，$f^*(r) = \hat{f}'(r)$ となるのは $r=1$ のときに限る．

成長を伴う期首収穫問題において $c = 2{,}880$，$r = 0, 0.5, 1$ である場合の最適解と目的関数の最大値を(65)と(66)から求めると，

（ i ）$r = 0$ であるとき，

$$\begin{aligned} &\hat{z}_1 = 1{,}920,\ \hat{z}_2 = 0,\ \hat{h}'_1 = 0,\ \hat{h}'_2 = 960 \\ &\hat{x}'_1 = 1{,}920,\ \hat{x}'_2 = 960,\ \hat{f}'(0) = 7{,}680 \end{aligned}$$

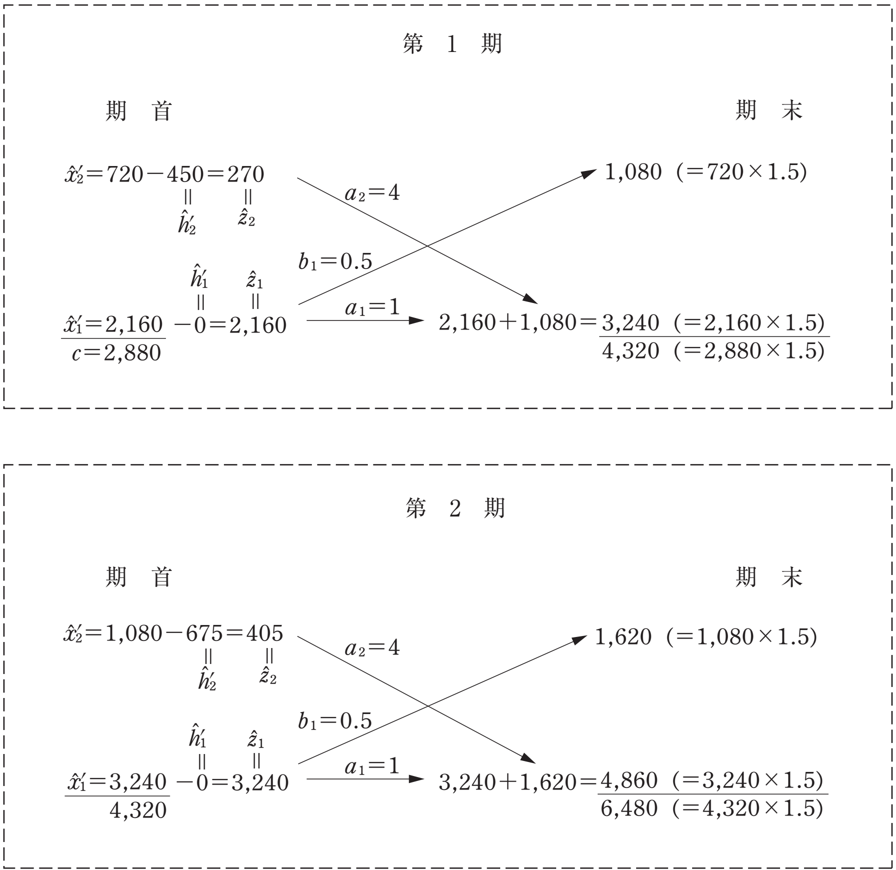
（ ii ）$r = 0.5$ であるとき，

$$\begin{aligned} &\hat{z}_1 = 2{,}160,\ \hat{z}_2 = 270,\ \hat{h}'_1 = 0,\ \hat{h}'_2 = 450 \\ &\hat{x}'_1 = 2{,}160,\ \hat{x}'_2 = 720,\ \hat{f}'(0.5) = 3{,}600 \end{aligned}$$

（iii）$r = 1$ であるとき，

$$\begin{aligned} &\hat{z}_1 = 2{,}304,\ \hat{z}_2 = 576,\ \hat{h}'_1 = 0,\ \hat{h}'_2 = 0 \\ &\hat{x}'_1 = 2{,}304,\ \hat{x}'_2 = 576,\ \hat{f}'(1) = 0 \end{aligned}$$

である．（ ii ）の $r = 0.5$ である場合の最初の2期間について各クラスの個体数と収穫数の成長過程を模式図で表すと，第3図のようになる．



第３図　$c=2,880$，$r=0.5$ のときの最初の２期間の期首収穫と成長

参考文献

［1］Anton, H., and Rorres, C., *Elementary Linear Algebra with Applications*. New York : John Wiley & Sons, 1987.

［2］Beckmann, M. J., and Künzi, H. P., *Mathematik für Ökonomen* II : *Liniare Algebra*. Berlin : Springer-Verlag, 1973.

［3］Berman, A., and Plemmons, R. J., *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. New York : Academic Press, 1979.

［4］Collatz, L., and Wetterling, W., *Optimization Problems*. New York : Springer-Verlag, 1975.

［5］Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*. Princeton, N. J. : Princeton University Press, 1963.

［6］Doubleday, W., "Harvesing in Matrix Population Models," *Biometrics*, Vol. 31 (1975), pp. 189-200.

［7］Goldman, A. J., and Tucker, A. W., "Theory of Linear Programming," in Kuhn, H. W., and Tucker, A. W. (eds.), *Linear Inequalities and Related Systems*. Princeton, N. J. : Princeton University Press, 1956, pp. 53-97.

［8］Horn, R. A., and Johnson, C. R., *Matrix Analysis*. Cambridge : Cambridge University Press, 1985.

［9］Kemp, M. C., and Kimura, Y., *Introduction to Mathematical Economics*. New York : Springer-Verlag, 1978.

［10］Kolman, B., and Beck, R. E., *Elementary Linear Programming with Applications*. Second Ed., New York : Academic Press, 1995.

［11］ Leslie, P. H., “On the Use of Matrices in Certain Population Mathematics,” *Biometrika*, Vol. 33 (1945), pp. 183-212.
［12］ Leslie, P. H., “Some Further Notes on the Use of Matrices in Population Mathematics,” *Biometrika*, Vol. 35 (1948), pp. 213-45.
［13］ Lewis, E. G., “On the Generation and Growth of a Population,” *Sankhya*, Vol. 6 (1942), pp. 93-6.
［14］ 二階堂副包，『現代経済学の数学的方法』，東京，岩波書店，1960 年.
［15］ Nikaido, H., *Convex Structures and Economic Theory*. New York : Academic Press, 1968.
［16］ 尾崎雄一郎，「Leslie 行列に基づいた期首収穫問題と期末収穫問題の比較」，『名城商学』，第 42 巻，第 2 号（1992 年），pp. 1-15.
［17］ 尾崎雄一郎，「Leslie 行列に基づいた期末収穫問題と期首収穫問題の最適解」，『名城論叢』，第 9 巻，第 4 号（2009 年），pp. 13-35.
［18］ 尾崎雄一郎，永田達哉，「Leslie 行列に基づいた期末収穫問題と期首収穫問題の関連」，『名城論叢』，第 9 巻，第 3 号（2008 年），pp. 45-64.
［19］ Woods, J. E., *Mathematical Economics*. London : Longman, 1978.