グリコ・チョコレート・パイナップル・ゲーム の最適混合戦略

尾　崎　雄一郎

普通のジャンケンのように勝つか負けるかだけではなく，何で勝ったかによって得点の異なるジャンケンがある.「石」(グー)で勝つなら「グリコ」で 3 点,「ハサミ」(チョキ)で勝つなら「チョコレート」で 6 点,「紙」(パー)で勝つなら「パイナップル」で 6 点を得る. このジャンケン（グリコ・チョコレート・パイナップル・ゲーム）のプレイヤー I から見た 2 人和ゼロゲームとしての利得行列は次のように表される.

(1)　プレイヤー I

	プレイヤーII 石	ハサミ	紙
石	0	3	−6
ハサミ	−3	0	6
紙	6	−6	0

この 3 × 3 戦略ゲームは，ゲームの理論に関する本でしばしば見られる人工的な，仮空のゲームとは異なる実在するゲームであり，プレイヤー達は恐らく最適戦略を全く知らずにこのゲームを行なっているのではないかと思う. このゲームを厳密に解くことは，最適戦略とゲームの値を知らずに，このゲームを行なっている当時者達にとっても，ゲームの理論に実際的な教材を提供するという点からも意義があると思う.

このゲームの最適な賭目とゲームの値は以下のように簡単な方法で求めることができる（Williams［5］, pp. 98–100）. プレイヤー I の最適な賭目を求めるには利得行列 (1) の第 1 列の各々の利得から第 2 列の対応する利得を引き，同様に第 2 列の各々の利得から第 3 列の対応する利得を引いて次の行列を作る.

(2)　プレイヤー I

石	−3	9
ハサミ	−3	−6
紙	12	−6

このとき,「石」の最適な賭目は，(2) から「石」の行を除いてできる行列式を計算し，その絶対値をとる，すなわち

$$\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 12 & -6 \end{vmatrix} = 90$$

が「石」に対する最適な賭目である. 同様に，(2) から「ハサミ」の行を除いてできる行列式

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 12 & -6 \end{vmatrix} = -90$$

の絶対値90が「ハサミ」に対する最適な賭目であり，「紙」に対する最適な賭目は(2)から「紙」の行を除いてできる行列式

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 45$$

の絶対値45である．以上より「石」,「ハサミ」,「紙」に対する最適な賭目またはゲーム1回毎の最適な混合戦略の比率 x_1^*，x_2^*，x_3^* は，

$$x_1^* : x_2^* : x_3^* = 90 : 90 : 45 = 2 : 2 : 1 = \frac{2}{5} : \frac{2}{5} : \frac{1}{5}$$

である．

プレイヤーⅡの最適な賭目を求めるには，利得行列(1)の第1行から第2行を引き，また第2行から第3行を引いて次の行列を作る．

(3)

プレイヤーⅡ

石	ハサミ	紙
3	3	−12
−9	6	6

プレイヤーⅡの「石」の最適な賭目を求めるには，(3)から「石」の列を除いてできる行列式を計算し，その絶対値をとる，すなわち

$$\begin{vmatrix} 3 & -12 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 90$$

が「石」に対する最適な賭目であり，(3)から「ハサミ」の列を除いてできる行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & -12 \\ -9 & 6 \end{vmatrix} = -90$$

の絶対値90が「ハサミ」の最適な賭目であり，「紙」に対する最適な賭目は，(3)から「紙」の列を除いてできる行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -9 & 6 \end{vmatrix} = 45$$

の絶対値45である．これらよりプレイヤーⅡの「石」,「ハサミ」,「紙」に対する最適な賭目またはゲーム1回毎の最適な混合戦略の比率 y_1^*，y_2^*，y_3^* は，

$$y_1^* : y_2^* : y_3^* = 90 : 90 : 45 = 2 : 2 : 1 = \frac{2}{5} : \frac{2}{5} : \frac{1}{5}$$

である．

ゲームの値 v^* は(1)のプレイヤーⅡの3つの戦略の中から任意に1つ，たとえば「石」を選び，これに対してプレイヤーⅠの最適な賭目(混合戦略)を用いて計算した平均利得，すなわち

$$v^* = \frac{0 \times 2 + (-3) \times 2 + 6 \times 1}{2 + 2 + 1} = 0$$

である．同様に，プレイヤーⅠの任意の戦略に対してプレイヤーⅡの最適な賭目（混合戦略）を用いてゲームの値を計算しても同じ結果をえる．このゲームは $v^* = 0$ であり，公平なゲームである．

ところで，利得行列 (1) は

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

であるから，歪対称行列である．歪対称行列を利得行列とするゲームの値 v^* はゼロであり，プレイヤーⅠとⅡの最適な混合戦略は等しく，

$$x_i^* = y_i^* \quad (i = 1, 2, 3)$$

であることが知られている（たとえば，Dorfman, Samuelson, and Solow［１］, p. 457, Luce and Raiffa［３］, pp. 419-20，尾崎［４］，定理４などを参照）．

大型のゲームの場合，ゲームの理論に固有な方法で解くと計算が大変なので，リニアー・プログラミングの問題として解くと効率的である（たとえば，Dorfman, Samuelson, and Solow［１］, pp. 436-42, Gass［２］, pp. 406-14 など）．利得行列 (1) に対するプレイヤーⅠの観点からのリニアー・プログラミングの問題は，

$$v$$

を次の制約条件の下で最大にする

$$\begin{aligned} -3x_2 + 6x_3 - v &\geqq 0 \\ 3x_1 \qquad\quad - 6x_3 - v &\geqq 0 \\ -6x_1 + 6x_2 \qquad\quad - v &\geqq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 1 \\ x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ v &\geqq 0 \end{aligned}$$

と表せる．この場合，ゲームの値 v は (1) が歪対称行列であることから，非負であるとしてよい．この問題の最適解は，

$$x_1^* = \frac{2}{5},\ x_2^* = \frac{2}{5},\ x_3^* = \frac{1}{5},\ v^* = 0$$

であり，これは先にえた結果と同じである．プレイヤーⅡの最適戦略も同様に求まる．

参考文献

［１］Dorfman, R., Samuelson, P. A., and Solow, R. M., *Linear Programming and Economic Analysis*. New York : McGraw-Hill Book Co., 1958.

［２］Gass, S. I., *Linear Programming : Methods and Applications*. Fifth Ed., New York : McGraw-Hill Book Co., 1985.

［３］Luce, R. D., and Raiffa, H., *Games and Decisions : Introduction and Critical Survey*. New York : John Wiley & Sons, 1957.

［４］尾崎雄一郎,「リニアー・プログラミングの２人ゼロ和ゲームへの変換とそれに関連する定理」,『名城論叢』，第９巻，第１号（2008 年），pp. 1-14.

［５］Williams, J. D., *The Compleat Strategyst*. New York : McGraw-Hill Book Co., 1966.